

## תרגיל בית 5 במבנים אלגבריים

### 89-214 סמסטר א' תשע"ו

**הוראות** בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא לתרגול בשבוע המתחיל בתאריך ' כסלו ה'תשע"ו, 29.11.2015.

**שאלה 1.** בכל סעיף נתונה חבורה  $G$  ותת-חבורה  $H \leq G$ . כתבו את כל המחלקות השמאליות של  $H$  ב- $G$ :

א.  $H = \langle 9 \rangle, G = (U_{10}, \cdot)$ .

ב.  $H = 3\mathbb{Z}_{12}, G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$ .

ג.  $H = \{e\}$ , חבורה כלשהי,  $G$ .

**שאלה 2.** נסתכל על  $G = (GL_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$  - חבורת המטריצות ההפיכות מגודל  $2 \times 2$  מעל  $\mathbb{Z}_2$  (שדה בין שני איברים),

א. רשום את כל איברי הקבוצה  $G$  (הזכר בהבדל בין  $GL_2(\mathbb{Z}_2)$  ל:  $M_2(\mathbb{Z}_2)$  בעת הכנת רשימת האיברים).

ב. תהי תת חבורה של  $G$ :  $A = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$ . מהו האינדקס של  $A$  ב  $G$ ?

ג. תהי תת חבורה של  $G$ :  $B = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ . מהו האינדקס של  $B$  ב  $G$ ?

ד. תהי תת חבורה של  $G$ :  $C = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$ . מהו האינדקס של  $C$  ב  $G$ ?

**שאלה 3.** תהא  $G$  חבורה לא אבלית מסדר 8. הוכח שקיימת ב  $G$  תת חבורה מסדר 4. (הדרכה: הראה שקיים בהכרח איבר מסדר 4 היוצר את תת החבורה המבוקשת).

**שאלה 4.** תהי  $G$  חבורה,  $a, b \in G$  כך ש:  $ab = ba$  ו  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$ . הוכח ש  $o(ab) = lcm(o(a), o(b))$

**שאלה 5.** חשב בעזרת משפט אוילר:

א.  $197^{81}$  מודולו 34

ב. שתי הספרות האחרונות של  $1249^{602}$

הערה. ניתן להעזר בנוסחה הבאה לחישוב פונקציית אוילר של מספר שלם כלשהו:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

כאשר  $p_1, \dots, p_k$  המספרים הראשוניים בפירוק של השלם  $n$ .

בהצלחה!