שיעורי בית 2

20 בנובמבר 2016

1. נגדיר M להיות כל המטריצות מגודל $\infty\times\infty$ עם רכיבים ממשיים שמקיימות שבכל שורה ובכל עמודה יש מספר סופי של איברים שונים מאפס. כלומר

$$M=\left\{(a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}\in\mathbb{R}^{\infty\times\infty}\mid[\forall i:\#\{a_{i,j}\neq0:j\in\mathbb{N}\}<\infty]\wedge[\forall j:\#\{a_{i,j}\neq0:i\in\mathbb{N}\}<\infty]\right\}$$

על M נגדיר פעולה של בדומה לכפל במטריצות מגודל סופי. כלומר לכל $A,B\in M$ את הכפל בניהם ע"י

$$(AB)_{i,j}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{i,k}b_{kj}$$

למשל $A=\begin{pmatrix}0&1&0&\\0&0&0&\ddots\\0&0&\ddots&\ddots\\&\ddots&&\\&&&\end{pmatrix}$ ו $B=\begin{pmatrix}0&0&0&\\1&0&0&\ddots\\0&0&\ddots&\ddots\\&\ddots&&\\&&&\end{pmatrix}$ שניהם שייכים ל M והכפל בניהם $AB=\begin{pmatrix}1&0&0&\\0&0&0&\ddots\\0&0&\ddots&\ddots\\&\ddots&&\\&&&\end{pmatrix}$

(א) הוכיחו כי הפעולה מוגדרת היטב, כלומר $AB\in M$

פתרון : צ"ל כי בכל שורה ובכל עמודה של AB יש מספר סופי של איברים שונים מאפס. נראה עבור השורות (עבור העמודות מראים באופן דומה). יהא i קבוע ונראה כי $\{(AB)_{i,j}\neq0:j\in\mathbb{N}\}<\infty$.

כיוון ש $A\in M$ מתקיים כי קיים אינדקס N כך ש $a_{i,k=0}$ לכל $N<k$ (כלומר שממקום מסוים בשורה i ב A מופיעים רק אפסים) ואז

$$\{(AB)_{i,j}\neq0:j\in\mathbb{N}\}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}a_{i,k}b_{kj}\neq0:j\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\sum_{k=1}^{N}a_{i,k}b_{kj}\neq0:j\in\mathbb{N}\right\}$$

בנוסף, כיוון ש $B\in M$ מתקיים כי קיים אינדקס M_1 כך ש $b_{k,1}=0$ לכל $M_1<k$

וגם קיים אינדקס M_2 כך ש $b_{k,2}=0$ לכל $M_2<k$

...

קיים אינדקס M_N כך ש $b_{k,N}=0$ לכל $N<k$

נגדיר $M=\max\{M_j:\ 1\le j\le N\}$ ואז

$$\{(AB)_{i,j}\neq 0:\ j\in\mathbb{N}\}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}a_{i,k}b_{kj}\neq 0:\ j\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\sum_{k=1}^{N}a_{i,k}b_{kj}\neq 0:\ j\in\mathbb{N}\right\}$$

$$=\left\{\sum_{k=1}^{N}a_{i,k}b_{kj}\neq 0:\ 1\le j\le M\right\}\le N\cdot M<\infty$$

(ב) הוכיחו כי ביחס לפעולה זאת M הוא מונואיד.

פתרון : מוגדרות ראינו בסעיף קודם.

קיבוציות - לכל $A,B,C\in M$ צ"ל כי $(AB)\,C=A\,(BC)$ אכן לכל i,j מתקיים

$$[(AB)\,C]_{i,j}=\sum_{k=1}^{\infty}(AB)_{i,k}\,C_{kj}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}A_{i,t}B_{t,k}C_{kj}$$

באופן דומה לסעיף הקודם, קיים Nכך ש $A_{i,t}=0$ לכל $N<t$ וקיים M כך ש $B_{t,k}=0$ לכל $M<k$ $1\le t\le N,$ ולכן

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}A_{i,t}B_{t,k}C_{kj}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{N}A_{i,t}B_{t,k}C_{kj}=\sum_{k=1}^{M}\sum_{t=1}^{N}A_{i,t}B_{t,k}C_{kj}$$

ואז ניתן להחליף את סדר הסכימה וא

$$\sum_{k=1}^{M}\sum_{t=1}^{N}A_{i,t}B_{t,k}C_{kj}=\sum_{t=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}A_{i,t}B_{t,k}C_{kj}=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}=A_{i,t}B_{t,k}C_{kj}$$

$$=\sum_{t=1}^{\infty}A_{i,t}\,(BC)_{t,j}=[A\,(BC)]_{i,j}$$

איבר יחידה היא מטריצה היחידה

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&\\0&1&0&\ddots\\0&0&1&\ddots\\&\ddots&&\ddots\\&&&\end{pmatrix}$$

(ג) מצאו דוגמא לאיבר $A \in M$ שיש לו הפיך ימיני אך אין לו הפיך שמאלי

פתרון : פתרון :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

יש לו הפיך ימיני, למשל

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & & \\ & \ddots & 1 & & \ddots & \\ & & & \ddots & & \end{pmatrix}$$

כי

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & & \\ & \ddots & 1 & & \ddots & \\ & & & \ddots & & \end{pmatrix}=I$$

(הערה: כל איבר מהצורה

$$\begin{pmatrix} * & * & * & & & \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & & \\ & \ddots & 1 & & \ddots & \\ & & & \ddots & & \end{pmatrix}$$

יהיה הפיך ימיני.

אין לו הפיך שמאלי כי לכל B מתקיים כי

$$C_1(BA)=0$$

כלומר העמודה הראשונה של BA תהיה עמודת אפסים בפרט לא שווה לעמודה הראשונה של I.

2. הכרה של עוד חבורות:

(א) הקווטרניונים: נגדיר

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}\right\}$$

8 מטריצות מרוכבות. עובדה: קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. האם חבורה זאת חילופית?

פתרון : לא חילופית, למשל

$$\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$$

ואילו

$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}$$

(ב) המרוכבים: נגדיר

$$G=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}:\ det(A)=a^2+b^2\neq 0\right\}$$

הוכיחו כי קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. האם חבורה זאת חילופית?

פתרון : מוגדרות

$$\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'&b'\\-b'&a'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa'-bb'&ab'+ba'\\-ba'-ab'&-bb'+aa'\end{pmatrix}$$

שזה מהצורה

$$\begin{pmatrix}x&y\\-y&x\end{pmatrix}$$

כאשר $x=aa'-bb',y=ab'+ba'$

כעת

$$det(\begin{pmatrix}x&y\\-y&x\end{pmatrix})=det\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\cdot det\begin{pmatrix}a'&b'\\-b'&a'\end{pmatrix}\neq 0$$

כמפלה של שני מספרים שונים מאפס.

קיבוציות־ נובע מקיבוציות של מכפלת מטריצות

איבר היחידה־ $I\in G$ (אם ניקח $a=1,b=0$)

הופכי: יהא $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$ אזי מחישוב ישיר נקבל כי

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

שזה מהצורה

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

כאשר $x = \frac{a}{a^2+b^2}, y = \frac{-b}{a^2+b^2}$ ובנוסף

$$det\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \frac{1}{det\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}} \neq 0$$

ולכן ההופכי שייך ל G.

בנוסף, החבורה חילופית כי

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-bb' & ab'+ba' \\ -ba'-ab' & -bb'+aa' \end{pmatrix}$$

ששווה ל

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a-b'b & a'b+b'a \\ -b'a-a'b & -b'b+a'a \end{pmatrix}$$

3. תהא G חבורה. נגדיר יחס עליה כך

$$g_1 \sim g_2 \iff \exists x \in G : xg_1x^{-1} = g_2$$

ליחס זה קוראים יחס ההצמדה או יחס צמידות. (מינוח: מחלקת שקילות של יחס ההצמדה נקראת מחלקת צמידות)

(א) הוכח כי ~ יחס שקילות על G.

פתרון : 1) רפלקסיביות: לכל $g \in G$ מתקיים כי $ege^{-1} = g$ ולכן $g \sim g$.

2) סימטריות: נניח $g_1 \sim g_2$ אזי קיים x כך ש $xg_1x^{-1} = g_2$. נכפול ב x מימין ו x^{-1} משמאל ונקבל $g_1 = x^{-1}g_2x$ נסמן $y = x^{-1}$ ונקבל $g_1 = yg_2y^{-1}$, כלומר $g_2 \sim g_1$.

3) טרנזיטיביות: נניח $g_1 \sim g_2, g_2 \sim g_3$ אזי קיימים x, y כך ש $yg_2y^{-1} = g_3$, $xg_1x^{-1} = g_2$. נסדר את המשוואות ל $xg_1x^{-1} = g_2$, $g_2 = y^{-1}g_3y$, נציב לקבל $xg_1x^{-1} = y^{-1}g_3y$. נכפול שוב ב y משמאל ו y^{-1} מימין ונקבל

$$yxg_1x^{-1}y^{-1} = g_3$$

נסמן $z = yx$ ונקבל $zg_1z^{-1} = g_3$ כלומר $g_1 \sim g_3$.

(ב) עבור $G=S_n$ ויחס ההצמדה: הוכיחו כי מתקיים $[(1,2)]=\{(i,j)\mid 1\le i<j\le n\}=\{(i,j)\mid 1\le i\ne j\le n\}$ כאשר $[(1,2)]$ זה מחלקת השקילות של $(1,2)$ של יחס ההצמדה [רמז: ש.ב. משבוע שעבר]. הסיקו כמה איברים יש במחלקת השקילות של $(1,2)$?

פתרון : מתרגיל קודם נקבל כי

$$\sigma\,(1,2)\,\sigma^{-1}=(\sigma(1),\sigma(2))$$

ולכן

$$[(1,2)]_{\sim}=\left\{\sigma\,(1,2)\,\sigma^{-1}\,|\,\sigma\in S_n\right\}=\{(\sigma(1),\sigma(2))\mid\sigma\in S_n\}=\{(i,j)\mid 1\le i<j\le n\}$$

כמה איברים יש בה?

נבחר i כל מספר בין 1 ל n. ואז נבחר j שונה. סה"כ אפשריות שספרנו זה $n\cdot(n-1)$. אבל ספרנו כפליות, למשל $(2,3)=(3,2)$ לכן צריך לחלק ב 2. התשובה הסופית היא

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

*זה שקול לשאלה לבחור 2 איברים מתוך n ללא חשיבות לסדר, ללא חזרות. לפי נוסחת הבינום זה שווה ל

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2!}=\frac{n(n-1)}{2}$$

4. הגדרה: תהא G חבורה. נסמן את המרכז של G ב $Z(G)=\{g\in G\mid\forall x\in G:\ gx=xg\}$. המרכז של G זה כל האיברים ב G שמתחלפים עם כל איבר אחר.

(א) הוכיחו כי $Z(G)$ חבורה. והוכיחו כי זוהי חבורה חילופית.

פתרון : מוגדרות: לכל $g_1,g_2\in Z(G)$ צ"ל כי $g_1g_2\in Z(G)$. שזה שקול להראות שלכל $x\in G$ מתקיים $g_1g_2x=xg_1g_2$. אכן כיוון ש g_1,g_2 מתחלפות עם כל x מתקיים כי

$$g_1g_2x=g_1xg_2=xg_1g_2$$

.

קיבוציות - נובע מהקיבוציות ב G

איבר יחידה: נראה שאיבר היחידה e של G שייך ל $Z(G)$ (ובפרט הוא יהיה יחידה ב $Z(G)$). אכן לכל $x\in G$ מתקיים

$$ex=x=xe$$

הופכי: יהא $g\in Z(G)$ אזי קיים $g^{-1}\in G$. נראה כי $g^{-1}\in Z(G)$. אכן לכל x מתקיים כי

$$gx=xg$$

ואם נכפיל ב g^{-1} משמאל ומימין נקבל כי

$$xg^{-1}=g^{-1}x$$

כלומר $g^{-1}\in Z(G)$ כנדרש.

נראה שהיא חבורה חילופית. אכן יהיו $g_1,g_2\in Z(G)$ צ"ל כי $g_1g_2=g_2g_1$. אכן כי g_1 מתחלף עם כל $x\in G$ בפרט עם g_2

(ב) לכל $g \in G$ מצאו את גודל מחלקת הצמידות של g

פתרון : מתקיים כי

$$[g] = \{g' \ : \ g' \sim g\} = \left\{xgx^{-1} \ : \ x \in G\right\} = \left\{xx^{-1}g \ : \ x \in G\right\} = \{g\}$$

ולכן גודל מחלקת הצמידות שווה 1

5. תהא G חבורה בה מתקיים $\forall g_1, g_2 \in G : (g_1g_2)^2 = g_1^2 g_2^2$.
הוכח כי G חבורה חילופית.
פתרון : יהיו $g_1g_2 \in G$. לפי נתון מתקיים

$$g_1 \left(g_2g_1\right) g_2 = \left(g_1g_2\right)\left(g_1g_2\right) = \left(g_1g_2\right)^2 = g_1^2g_2^2 = g_1\left(g_1g_2\right)g_2$$

נכפיל את השיוויון ב g_1^{-1} משמאל וב g_2^{-1} מימין ונקבל כי $g_2g_1 = g_1g_2$.

6.

(א) ראינו בתירגול כי הגדרה שקולה ל $\mathbb{Z}_n$. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{Z}$ ע"י

$$x \equiv y \iff n|x-y$$

את קבוצת המנה ניתן להציג כ

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$$

והגדרנו את הפעולה

$$[a] + [b] = [a+b]$$

שאיתה נקבל חבורה חיבורית $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. כעת נגדיר עוד פעולה על קבוצה זאת: לכל $[a], [b] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ נגדיר פעולת כפל

$$[a][b] = [ab]$$

הוכיחו כי פעולה זאת מוגדרת וביחס אליה נקבל כי $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$ מונואיד.
פתרון : מוגדרות הפעולה. נניח $[a] = [a'], [b] = [b']$ צ"ל $[ab] = [a'b']$ אכן מהנתון $n|a-a', n|b-b'$. צ"ל כי $n|ab-a'b'$ אכן

$$ab - a'b' = ab - ab' + ab' - a'b' = a(b-b') + (a-a')b'$$

כיוון ש $b-b', a-a'$ מתחלק ב n גם $ab-a'b'$.

קיבוציות־ אכן

$$[a]\left([b][c]\right) = [abc] = \left([a][b]\right)[c]$$

יחידה $[1]$ כי $[a][1] = [a]$

(ב) בעזרת סעיף קודם חשבו את

$$7^n - 3^n \mod 8$$

לכל n טבעי.

פתרון : נסתכל בחבורה במונואיד $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \cdot)$:

עבור $n = 2k$ זוגי נקבל כי

$$[7^{2k}] = [7]^{2k} = [-1]^{2k} = [(-1)^{2k}] = [1]$$

ולכן

$$7^n \mod 8 = 1$$

בנוסף,

$$[3^{2k}] = [3^2]^k = [9]^k = [1]^k = [1^k] = [1]$$

ומכאן ש

$$[-3^n] = [-1][3^n] = [-1][1] = [-1 \cdot 1] = [-1]$$

ולכן

$$-3^n \mod 8 = -1$$

ולכן בחבורה החיבורית $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ נקבל

$$[7^n - 3^n] = [7^n] + [-3^n] = [1] + [-1] = [1 - 1] = [0]$$

כלומר

$$7^n - 3^n \mod 8 = 0$$

עבור $n = 2k + 1$ אי זוגי נקבל כי

$$[7^{2k+1}] = [7]^{2k+1} = [-1]^{2k+1} = [(-1)^{2k+1}] = [-1]$$

ולכן

$$7^n \mod 8 = -1$$

בנוסף,

$$[3^{2k+1}] = [3^2]^k[3] = [9]^k[3] = [1]^k[3] = [1^k][3] = [3]$$

ומכאן ש

$$[-3^n] = [-1][3^n] = [-1][3] = [-1 \cdot 3] = [-3] = [5]$$

ולכן

$$-3^n \mod 8 = 5$$

ולכן בחבורה החיבורית $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ נקבל

$$[7^n - 3^n] = [7^n] + [-3^n] = [-1] + [5] = [-1 + 5] = [4]$$

כלומר

$$7^n - 3^n \mod 8 = 4$$