פתרון תרגיל 1

1. לכל קבוצה $E\subseteq\mathbb{R}$ ו $a,b\in\mathbb{R}$ מגדירים $aE+b:=\{ax+b:x\in E\}$ (ז"א ש $aE+b$ היא תמונת E תחת הפונקציה הלינארית $x\mapsto ax+b$). הוכיחו: $m^*(aE+b)=|a|m^*(E)$.

פתרון: הזזה ראיתם בהרצאה. לכן נראה רק את המקרה $m^*(aE)=|a|m^*(E)$.

המקרה בו $a=0$ הינו טריויאלי שכן אז $aE=0$. נוכיח ל $a\neq 0$.

למה: O כיסוי פתוח של E אם ורק אם aO כיסוי פתוח של aE .

הוכחה:

$\Leftarrow$: הפונקציה $x\mapsto ax$ פתוחה (ההופכית שלה רציפה) ולכן aO קבוצה פתוחה. מצד שני $aO=a(E\cap O)\cup(O/E)=a(E\cup(O/E))=aE\cup a(O/E)$, ומכאן $aE\subseteq aO$. ולכן aO כיסוי פתוח של aE .

$\Rightarrow$: באותו אופן ע"י $x\mapsto\frac{1}{a}x$. מש"ל.

כעת, נשים לב כי $\bigcup_{n=1}^{\infty}aI_n=a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)$ ומכאן ש

$$\begin{aligned}
m^*(aE)&=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}l(I_n)\mid aE\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n, I_n \text{ is an interval}\}\\
&=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}l(aI_n)\mid E\subseteq a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}aI_n\right), I_n \text{ is an interval}\}\\
&=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}|a|l(I_n)\mid E\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right), I_n \text{ is an interval}\}\\
&=|a|\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}l(I_n)\mid E\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right), I_n \text{ is an interval}\}\\
&=|a|\mathrm{m}^*(E)
\end{aligned}$$

מש"ל.

2. סדרה של קבוצות $\{F_n\}$ ב $\mathbb{R}$ תקרא יורדת אם $F_{n+1}\subseteq F_n$.

א. הוכיחו כי אם $\{F_n\}$ סדרה יורדת של קבוצות סגורות ב $\mathbb{R}$ ו F_1 חסומה אזי $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$.

ב. האם הדבר נכון גם כאשר F_1 לא חסומה?

פתרון:

א. נניח בשלילה כי החיתוך ריק. אזי נקבל כי ישנה סדרה עולה של קבוצות פתוחות $O_{n+1} \supseteq O_n$ כך ש $\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n = \mathbb{R}$. מכיוון ש F_1 קומפקטית נקבל כי $F_1 \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} O_n = O_N$.

ולכן $F_N \subseteq F_1^c$ בניגוד להנחה ש $F_N \subseteq F_1$.

ב. ניקח $F_n = [n, \infty)$

3. הגדרה: נאמר שקבוצה $G \subseteq \mathbb{R}$ היא מטיפוס G_δ אם ניתן להציג אותה כחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ הוכיחו שקיימת קבוצה $G \in G_\delta$ המקיימת $E \subseteq G$ וכן $m*(G) = m*(E)$.

הדרכה: עקבו אחרי השלבים הבאים:

א. הוכיחו שלכל קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה פתוחה O, המקיימת $E \subseteq O$ וכן

$$m*(O) < m*(E) + \varepsilon$$

ב. בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ א' וחיתכו אותן.

פתרון: תהי $E \subseteq \mathbb{R}$. עפ"י ההדרכה, נמצא קבוצה פתוחה O כך ש $m*(O) < m*(E) + \varepsilon$. מכיוון שהמידה החיצונית של קבוצה הינה האינפימום על סכום של אורך של קטעים שאיחודם מכסה את E נקבל כי קיימים קטעים $\{I_k\}$ המכסים את E כך ש $\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) < m*(E) + \varepsilon$. מכאן שאם נסמן $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = O$, נקבל כי O הינה קבוצה פתוחה המקיימת $m*(O) \le \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) < m*(E) + \varepsilon$. נבנה סדרה של קבוצות פתוחות $\{O'_m\}$ כך ש $m*(O'_m) < m*(E) + \frac{1}{m}$. נסמן $O = \bigcap_{m=1}^{\infty} O_m$. זוהי קבוצה ב G_δ. מהמונוטוניות של המידה נקבל

$\forall m \in \mathbb{N} \quad m*(E) \le m*(O) = m*\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} O_m\right) < m*(E) + \frac{1}{m}$. נשאיף לאינסוף ונקבל את הפתרון.