לינארית 1 ־ בוחן תשעח

מס' קורס: 88־112־05/08/11/13/16
מרצים: שמעון ברוקס, אליהו מצרי, ארז שיינר.
מתרגלים: ניקול בלשוב, עדי בן צבי, תמר בר־און, עוזי חרוש, מיכאל טוויטו, פולינה לצקר, עקיבא מלכה.
משך המבחן: 1:45 שעות.
עליכם לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון פשוט.
בהצלחה!

1. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם A מטריצה סימטרית והפיכה, אז A^{-1} סימטרית.

(ב) אם למערכת $Ax=b$ יש אינסוף פתרונות, אז קיים וקטור c כך שלמערכת $Ax=c$ אין פתרון.

(ג) אם למערכת $Ax=b$ אין פתרון, אז קיים וקטור c כך שלמערכת $Ax=c$ יש אינסוף פתרונות.

פתרון:

i. הוכחה: A סימטרית אומר ש־$A=A^t$. הוכחנו בתרגול ש־$(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$, ולכן נקבל: $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}=A^{-1}$.

ii. הפרכה: נסתכל על המערכת $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. למערכת יש אינסוף פתרונות, אולם לא קיים וקטור c כך שלמערכת אין פתרון, משום שלא ניתן להגיע לשורת סתירה־ בצורה המדורגת קנונית אין שורת אפסים.

iii. הפרכה: נסתכל על המערכת $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. למערכת אין פתרון מכיוון שיש שורת סתירה, אולם לא קיים וקטור c עבורו יש אינסוף פתרונות, מכיוון שאין משתנה חופשי בצורה המדורגת קנונית.

.2

(א) עבור אילו ערכי k (מעל $\mathbb{R}$) יש למערכת

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x + ky + z + w = 1 \\ x + y + k^2z + w = k \end{cases}$$

i. אפס פתרונות.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. פתרון יחיד.

(ב) עבור $k=1$ מצא את הפתרון הכללי של המערכת.

i. נרשום את המערכת המשוואות כמטריצה ונדרג אותה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & k^2 & 1 & | & k \end{pmatrix} \underset{R_3-R_1}{\overset{R_2-R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & k^2-1 & 0 & | & k-1 \end{pmatrix}$$

אם $k=-1$ אז בשורה השלישית יהיה רשום $0=1$ לכן במצב זה נקבל שאין פתרון, אם $k=1$ אז השורות השנייה והשלישית מתאפסות יש לנו אינסוף פתרונות עם 3 דרגות חופש, ואם $k\neq 1,-1$ אז אף שורה אינה מתאפסת אבל עדיין המערכת עם 4 משתנים ושלוש משוואות לכן יש לנו אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת, לסיכום:

א'. אין פתרון: $k=-1$

ב'. אינסוף פתרונות: $k\neq -1$

ג'. פתרון יחיד : ϕ

ii. נציב $k=1$ ונקבל

$$x+y+z+w=1$$

לכן הפתרון הכללי הינו

$$(1-y-z-w,y,z,w)$$

iii. היות אנחנו מעל $\mathbb{Z}_5$ (שדה סופי) גם מספר הפתרונות הינו סופים. אם $k=1$ נקבל רק משוואה אחת

$$x+y+z+w=1$$

שבה יש 3 דרגות חופש, כלומר ניתן להציב את כל אברי השדה $\{0,1,2,3,4\}$ ב 3 נעלמים והרביעי נקבע מהמשוואה מכאן מספר בפתרונות יהיה $5^3=125$

.3

(א) תהי A מטריצה. נניח שאחרי ביצוע פעולות השורה הבאות:

$$R_1\to 2R_1$$

$$R_2\to R_2-3R_1$$

$$R_3\longleftrightarrow R_2$$

$$R_1 \to R_1 + R_2$$

הגענו למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. מצאו את A.

(ב) תהי B מטריצה כלשהי מגודל 3×3. נניח שאחרי ביצוע אותן פעולת שורה מסעיף א', הגענו למטריצה כלשהי C. הוכיחו שB הפיכה אם ורק אם C הפיכה.

פתרון:

i. על מנת למצוא את A, עלינו לבצע את הפעולות ההפוכות על $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, בסדר הפוך.

$$R_1 \to R_1 - R_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \longleftrightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 + 3R_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \to \frac{1}{2}R_1$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

ii. נסמן את המטריצות האלמנטריות שמתאימות לפעולות הנתונות בE_1, E_2, E_3, E_4 בהתאמה. נקבל ש: $C = E_4E_3E_2E_1B$
כיוון ראשון: נניח שB הפיכה. כזכור, כל מטריצה אלמנטרית היא הפיכה. נקבל שC היא מכפלה של מטריצות הפיכות ולכן הפיכה.
כיוון שני: נניח שC הפיכה. ידוע שאם מכפלה של מריצות הפיכה, אז כל אחת מהן הפיכה. לכן B הפיכה.