תרגיל 1

1. לכל קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ ו $a,b \in \mathbb{R}$ מגדירים $aE+b := \{ax+b : x \in E\}$ (ז"א ש $aE+b$ היא תמונת E תחת הפונקציה הלינארית $x \mapsto ax+b$). הוכיחו: $m^*\left(aE+b\right) = \left|a\right| m^*\left(E\right)$.

1. סדרה של קבוצות $\{F_n\}$ ב $\mathbb{R}$ תקרא יורדת אם $F_{n+1} \subseteq F_n$.
   א. הוכיחו כי אם $\{F_n\}$ סדרה יורדת של קבוצות סגורות ב $\mathbb{R}$ ו F_1 חסומה אזי $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$.
   ב. האם הדבר נכון גם כאשר F_1 לא חסומה?

2. הגדרה: נאמר שקבוצה $G \subseteq \mathbb{R}$ היא מטיפוס G_δ אם ניתן להציג אותה כחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

   תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ הוכיחו שקיימת קבוצה $G \in G_\delta$ המקיימת $E \subseteq G$ וכן $m^*\left(G\right) = m^*\left(E\right)$.
   הדרכה: עקבו אחרי השלבים הבאים:
   א. הוכיחו שלכל קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה פתוחה O , המקיימת $E \subseteq O$ וכן
   $$m^*\left(O\right) < m^*\left(E\right) + \varepsilon$$
   ב. בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ א' וחיתכו אותן.