תרגיל 3- פתרון.

שאלה 1

1) (א) $\mu_F(I_1) = \mu_F((3,\infty)) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x) - F(3) = 21-11=10$

(ב) $\mu_F(I_2) = \mu_F((\frac{1}{4},2)) = \lim\limits_{x^-\to 2} F(x) - F(\frac{1}{4}) = 9-(5.5) = 3.5$

(ג) $\mu_F(I_3) = \mu_F([-1,0]) = F(0) - \lim\limits_{x^-\to -1} F(x) = 5 - (\frac{3}{e}+1) = 4-\frac{3}{e}$

(ד) $\mu_F(I_4) = \mu_F(\{-2,0,4,6\}) \overset{\mu_F \text{ אדטיביות}}{=} \mu_F(\{-2\})+\mu_F(\{0\})+\mu_F(\{4\})+\mu_F(\{6\}) =$

$= (F(2) - \lim\limits_{x^-\to 2} F(x)) + (F(0) - \lim\limits_{x^-\to 0} F(x)) + (F(4) - \lim\limits_{x^-\to 4} F(x)) + (F(6) - \lim\limits_{x^-\to 6} F(x)) =$

$= (9-9)+(5-4)+(21-13)+(21-21) = 9.$

2) הפונקציה F קבועה ב $[5,\infty)$ ולכן מידה של כל תת קבוצה אלמנטרית של $[5,\infty)$ היא 0.

מכאן נובע, שלכל $A\subset[5,\infty)$ המידה החיצונית $\mu^*_F(A)$ היא 0 - כאינפימום של אפסים.

לכן, היא מדידה - μ_F (כי קריטריון כרתאודורי נבדק האלמנטרית: ϕ).

קיבלנו: כל תת קבוצה של $[5,\infty)$ מדידה - μ_F

3) נשתמש בטענה הבאה:

תהי $F:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ מונוטונית לא יורדת ורציפה מימין.

$A\subseteq(-\infty,0)$ מדידה - μ_F אם"ם קיימות סדרות של קבוצות, E_n ו- F_n כך שלכל n

E_n פתוחה, F_n סגורה ו- $F_n\subseteq A\subseteq E_n$ וגם: $\lim\limits_{n\to\infty}(E_n\setminus F_n)=0$

<u>הוכחה</u>: הוכחת כיוון עבור מידת לבג (ראו הוכחה באתר, בקישור "הוכחות מהתרגול").

הוכחת הטענה הנוכחית - באותו אופן.

כדי: תהי $A\subseteq(-\infty,0)$. צריך להוכיח

שקיימות E_n, F_n (פתוחות, סגורות) כך ש- $F_n\subseteq A\subseteq E_n$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} m(E_n\setminus F_n)=0$

אם ורק אם קיימות E''_n, F'_n (פתוחות, סגורות) כך ש- $F'_n\subseteq A\subseteq E'_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(E'_n\setminus F'_n)=0$

ראשית, נניח שקיימות E_n פתוחות פתוחות, F_n סגורות

כך ש- $F_n\subseteq A\subseteq E_n$

$$(*)\ \lim_{n\to\infty} m(E_n\setminus F_n)=0$$

נשים לב שלכל קטע I (פתוח / סגור / חצי פתוח חצי סגור)

שמוכל ב- $(-\infty,0)$

$$0\leq \mu_F(I)\leq 3m(I)$$

(כי לכל $-\infty<a<b\leq0$ $\quad \frac{F(b)-F(a)}{b-a}\leq 3e^b\leq 3$ ע"י שימוש במשפט הערך הממוצע של לגרנז')

לכן, מאדיטיביות זה נכון עבור איחוד זר של קטעים ב- $(-\infty,0)$.
ומהגדרת ההרחבה (כגבול תחתון של מידות של קב' זרות מתקיים היחס הנ"ל). נקבל שגם:

$$0\leq \mu_F(E_n\setminus F_n)\leq 3m(E_n\setminus F_n)$$

ולכן, לפי כלל הסנדוויץ', מההנחה (*) נקבל: $\mu_F(E_n\setminus F_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$

ומצאנו $E'_n:=E_n$ $\quad F'_n:=F_n$ כנדרש.

ובאופן דומה:

מצד שני, נניח כי A חסומה, וקיימות E'_n פתוחות F'_n סגורות כך ש-

$$F'_n\subseteq A\subseteq E'_n\subset(r,0] \quad (-\infty<r)$$

$$\lim_{n\to\infty}(E'_n\setminus F'_n)=0 \quad (**).$$

מכיון שלכל קטע I מ- $[r,0)$: $\quad 3e^r m(I)\leq \mu_F(I)$

(כי לכל $r\leq a<b\leq 0$: $\quad 3e^r\leq 3e^a\leq \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ - ע"י שימוש במשפט הערך הממוצע של לגרנז')

מהגדרת ההרחבה נקבל ש- $0\leq m(E'_n\setminus F'_n)\leq \frac{\mu_F(E'_n\setminus F'_n)}{3e^r}$ ולכן (לפי הנחה (**)): $m(E'_n\setminus F'_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$

ומצאנו $E_n:=E'_n$; $F_n:=F'_n$ כנדרש.

נוסף לה:

הוכחנו כי לכל $A\subseteq(-\infty,0)$ חסומה

A מדידה μ_F אמ"מ A מדידה לבג.

עבור $A\subset(-\infty,0)$ כללית, נציג את A כאיחוד בן מניה של קב' חסומות

באופן: $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$, כאשר: $A_k=(A\cap[-k,-k+1))$

קל לוודא לפי טיעון הסגירות הקב' המדידות לאיחודים וחיתוכים בנ"מ.

אזי:

A מדידה μ_F $\Longleftrightarrow$ לכל k A_k מדידה μ_F

לפי הטענה $\Longleftrightarrow$ לכל k A_k מדידה לבג

$\Longleftrightarrow$ A מדידה לבג.

ולכן $A\subseteq(-\infty,0)$ מדידה μ_F אמ"מ היא מדידה לבג.

שאלה 2

1) צריך להראות כי $\mathcal{B}_f$ הינה σ-אלגברה מעל Y.

נבדוק לפי ההגדרה:

(א) $Y\in\mathcal{B}_f$ שכן $X\in\mathcal{A}$ ו- $X=f^{-1}[Y]$

(ב) נניח $\{A_n\}\subseteq\mathcal{B}_f$ אזי לכל n: $f^{-1}[A_n]\in\mathcal{A}$

ולכן $\bigcup f^{-1}[A_n]\in\mathcal{A}$ (כי $\mathcal{A}$ σ-אלג')

אולם: $\bigcup f^{-1}[A_n]=f^{-1}[\bigcup A_n]$

ולכן $\bigcup A_n\in\mathcal{B}_f$

(ג) נניח $A\in\mathcal{B}_f$ אזי $f^{-1}[A]\in\mathcal{A}$ ולכן $(f^{-1}[A])^c\in\mathcal{A}$

(כי $\mathcal{A}$ σ-אלג'), אולם: $(f^{-1}[A])^c=f^{-1}[A^c]$

מכיון ש-f פונקציה מעל X. ומכן $A^c\in\mathcal{B}_f$.

ולכן $(Y,\mathcal{B}_f)$ מרחב מדיד.

2) צריך להראות כי ν היא מידה חיובית מעל $(Y, \mathcal{B}_f)$

נבדוק לפי ההגדרה.

א) לכל $E \in \mathcal{B}_f$ $\quad 0 \leq \mu(f^{-1}[E])$ כי μ מידה חיובית

ולכן: $0 \leq \nu(E)$

ב) $f^{-1}[\phi] = \phi$ ו- $\mu(\phi) = 0$ כי μ מידה

לכן $\nu(\phi) = 0$

ג) יהיו $A_n \in \mathcal{B}_f$ זרות בזוגות

אזי $f^{-1}[A_n]$ זרות בזוגות (כי f פונקציה)
בפרט - מוגדרת היטב.

ומכיון ש μ מידה:

$$\nu(f^{-1}[\uplus A_n]) = \nu(\uplus f^{-1}[A_n]) = \mu(\uplus f^{-1}[A_n]) = \sum \mu(f^{-1}[A_n]) = \sum \nu(A_n)$$

$$f^{-1}[\uplus A_n] = \uplus f^{-1}[A_n]$$

לכן $(Y, \mathcal{B}_f, \nu)$ היא מרחב מידה חיובית.

שאלה 3

1) נגדיר: $F_n := \bigcap_{k \geq n} E_k \in \mathcal{A}$

$$F := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \liminf E_n \in \mathcal{A}$$

מההגדרה נובע - $F_n \subseteq F_{n+1}$ (כלומר: F_n סדרה עולה של קבוצות)

לכן: $\forall n \quad F_n = F_1 \uplus (F_2 \setminus F_1) \uplus \dots \uplus (F_n \setminus F_{n-1})$

וכל הקב' באיחוד הנ"ל הן זרות.

מסיגמא-אדיטיביות μ:

$$\mu(F_n) = \mu(F_1) + \mu(F_2 \setminus F_1) + \dots + \mu(F_n \setminus F_{n-1})$$

כמו כן:

$$F = \biguplus_{n=1}^{\infty} F_n = F_1 \uplus (F_2 \setminus F_1) \uplus \dots$$

ולכן: $\mu(F) = \mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu(F_1) + \mu(F_2 \setminus F_1) + \mu(F_3 \setminus F_2) + \dots$

סכום של טור = גבול הסכומים החלקיים

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\mu(F_1) + \mu(F_2 \setminus F_1) + \dots + \mu(F_n \setminus F_{n-1})\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mu(F_n)$$

כמו כן, לכל n: $F_n \subseteq E_n$, לכן - ממונוטוניות μ: $\mu(F_n) \leq \mu(E_n)$

ומכאן נסיק: $\mu(F) = \lim_{n \to \infty} \mu(F_n) \leq \liminf \mu(E_n)$.

בסה"כ $\mu(\liminf E_n) = \mu(F) \leq \liminf \mu(E_n)$

כנדרש.

2) נגדיר:

$$F_n := \bigcup_{k \geq n} E_n \in \mathcal{A}$$

$$F := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \limsup E_n \in \mathcal{A} .$$

$F_{n+1} \subseteq F_n$ -סדרה יורדת ב $\mathcal{A}$

כמו בסעיף (1) ולפי הנתון, קיים n_0 כך ש- $\mu(F_{n_0}) < \infty$ $\left(\forall n \geq n_0 \quad \mu(F_n) \overset{F_n \subseteq F_{n_0}}{\leq} \mu(F_{n_0}) \text{ מונוטוניות}\right)$

$$\mu(F) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \underset{F_n \text{ יורדת}}{=} \mu\left(F_{n_0} \setminus \left(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} (F_{n_0} \setminus F_n)\right)\right) = \mu(F_{n_0}) - \mu\Big(\overbrace{\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} (F_{n_0} \setminus F_n)}^{\text{סדרה עולה}}\Big) = .$$

חיסור - סופי כל מעבר סופה

$$= \mu(F_{n_0}) - \lim \mu(F_{n_0} \setminus F_n) = \mu(F_{n_0}) - \mu(F_{n_0}) + \lim \mu(F_n) = \lim \mu(F_n)$$

בנוסף, מהגדרת F_n נקבל שלכל n: $E_n \subseteq F_n \underset{\text{מונוטוניות } \mu}{\Rightarrow} \mu(E_n) \leq \mu(F_n)$

ולכן גם

$$\mu(\limsup E_n) = \mu(F) = \lim \mu(F_n) \geq \limsup \mu(E_n) .$$

כנדרש.

שאלה 4

נבדוק לפי ההגדרה:

(א) לכל $F \in \mathcal{A}$ ולכן $0 \overset{\mu \text{ חיובית}}{\leq} \mu(F \cap S)$ ולכן $0 \leq \nu(F)$ - ν חיובית.

(ב) $\nu(\phi) = \mu(\phi \cap S) = \mu(\phi) \underset{\mu \text{ מידה}}{=} 0$

(ג) תהא $\{F_n\}$ סדרת קבוצות מדידות-$\mathcal{A}$ זרות בזוגות

אזי:

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu\left(S \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (S \cap F_n)\right) \underset{\sigma \text{ אדיטיביות } \mu}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S \cap F_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(F_n)$$

קיבלנו: ν מידה חיובית על $(X, \mathcal{A})$.