תרגיל 3 - פתרון.

שאלה 1

1)

(א) $\mu_F(I_1) = \mu_F((3,\infty)) = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(3) = 21-11=10$

(ב) $\mu_F(I_2) = \mu_F((\frac{1}{4},2)) = \lim_{x\to 2^-} F(x) - F(\frac{1}{4}) = 9-(5.5) = 3.5$

(ג) $\mu_F(I_3) = \mu_F([-1,0]) = F(0) - \lim_{x\to -1^-} F(x) = 5-(\frac{3}{e}+1) = 4-\frac{3}{e}$

(ד) $\mu_F(I_4) = \mu_F(\{-2,0,4,6\}) \overset{\text{אדיטיביות } \mu_F}{=} \mu_F(\{-2\}) + \mu_F(\{0\}) + \mu_F(\{4\}) + \mu_F(\{6\}) =$

$= (F(2) - \lim_{x\to 2^-} F(x)) + (F(0) - \lim_{x\to 0^-} F(x)) + (F(4) - \lim_{x\to 4^-} F(x)) + (F(6) - \lim_{x\to 6^-} F(x)) =$

$= (9-9)+(5-4)+(21-13)+(21-21) = 9.$

2) הפונקציה F קבועה ב- $[5,\infty)$ ולכן מידה של כל תת קבוצה אלמנטרית של $[5,\infty)$ היא 0.

מכאן נובע, שלכל $A\subset[5,\infty)$ המידה החיצונית $\mu^*_F(A)$ היא 0 - כאינפימום של אפסים.

לכן, היא מדידה - μ_F (כי קריטריון כרתאודורי נבדק האלמנטריות: ϕ).

קיבלנו: <u>כל</u> תת קבוצה של $[5,\infty)$ מדידה - μ_F

3) נשתמש בטענה הבאה:

יהי $F:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ מונוטונית לא יורדת ורציפה מימין.

$A\subseteq(-\infty,0)$ מדידה - μ_F אם"ם קיימות סדרות של קבוצות, E_n ו- F_n כך שלכל n

E_n פתוחה, F_n סגורה ו- $F_n\subseteq A\subseteq E_n$ וגם: $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n\setminus F_n)=0$

<u>הוכחה</u>: הוכחת כיוון אחד עבור מידת לבג (ראו הוכחה באתר, בקישור "הוכחה מהתרגול").

הוכחת הטענה הכללית - באותו אופן.

כזכור: תהי $A \subseteq (r,0)$, צריך להוכיח

שקיימות E_n, F_n (פתוחות, סגורות) כך ש- $F_n \subseteq A \subseteq E_n$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} m(E_n \setminus F_n) = 0$

אם ורק אם קיימות E_n'', F_n' (פתוחות, סגורות) כך ש- $F_n' \subseteq A \subseteq E_n'$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_F(E_n' \setminus F_n') = 0$

ראשית, נניח שקיימות E_n פתוחות, F_n סגורות

כך ש- $F_n \subseteq A \subseteq E_n$

$$(*) \quad \lim_{n\to\infty} m(E_n \setminus F_n) = 0$$

נשים לב שלכל קטע I (פתוח / סגור / חצי פתוח חצי סגור)

שמוכל ב- $(-\infty, 0)$

$$0 \leq \mu_F(I) \leq 3m(I)$$

(כי לכל $-\infty < a < b \leq 0$

$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} \leq 3e^b \leq 3$

ע"י שימוש במשפט הערך הממוצע של לגרנז')

לכן, משום שכל פתוחה זה איחוד זר של קטעים ב- $(-\infty, 0)$.
מתהליך ההרחבה (כגבול תחתון של סכום של קב' מתאימים
היחס נשמר), נקבל ש:

$$0 \leq \mu_F(E_n \setminus F_n) \leq 3m(E_n \setminus F_n)$$

ולכן, לפי כלל הסנדוויץ', מההנחה (*) נקבל: $\mu_F(E_n \setminus F_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ונציב $E_n' := E_n$ $\quad F_n' := F_n$ כנדרש.

ובאופן דומה:

מצד שני, נניח כי A חסומה, וקיימות E_n' פתוחות F_n' סגורות כך ש-

$$F_n' \subseteq A \subseteq E_n' \subset (r, 0] \qquad (-\infty < r)$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu_F(E_n' \setminus F_n') = 0 \quad (**)$$

מכיון שלכל קטע I ב- $[r, 0)$: $\quad 3e^r m(I) \leq \mu_F(I)$

(כי לכל $r \leq a < b \leq 0$: $\quad 3e^r \leq 3e^a \leq \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ - ע"י שימוש במשפט הערך הממוצע של לגרנז')

מתהליך ההרחבה נקבל ש- $0 \leq m(E_n' \setminus F_n') \leq \frac{\mu_F(E_n' \setminus F_n')}{3e^r}$ ולכן: $m(E_n' \setminus F_n') \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ((לפי ההנחה (**))

ונציב $E_n := E_n'$; $F_n := F_n'$ כנדרש.

מסקנה:

הוכחנו כי לכל $A \subseteq (-\infty,0)$ חסומה

A מדידה μ_F אמ"מ A מדידה לבג.

עבור $A\subset(-\infty,0)$ כללית, נציג את A כאיחוד מני בר של קב' חסומות:

$A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$, כאשר: $A_k=(A\cap[-k,-k+1))$

(קל לוודא ע"י שימוש בסגירות הקב' המדידות לאיחודים וחיתוכים בנ"מ)

אזי:

A מדידה μ_F $\Longleftrightarrow$ לכל k A_k מדידה μ_F

לפי המסקנה $\Longleftrightarrow$ לכל k A_k מדידה לבג

$\Longleftrightarrow$ A מדידה לבג.

ולכן $A\subseteq(-\infty,0)$ מדידה μ_F אמ"מ היא מדידה לבג.

שאלה 2

1) צריך להראות כי $\mathcal{B}_f$ היא σ-אלגברה מעל Y.

נבדוק לפי ההגדרה:

(א) $Y\in\mathcal{B}_f$ שכן $X\in\mathcal{A}$ ו- $X=f^{-1}[Y]$

(ב) נניח $\{A_n\}\subseteq\mathcal{B}_f$ אזי לכל: $f^{-1}[A_n]\in\mathcal{A}$

ולכן $\bigcup f^{-1}[A_n]\in\mathcal{A}$ (כי $\mathcal{A}$ σ-אלג')

אולם: $\bigcup f^{-1}[A_n]=f^{-1}[\bigcup A_n]$

ולכן $\bigcup A_n\in\mathcal{B}_f$

(ג) נניח $A\in\mathcal{B}_f$ אזי $f^{-1}[A]\in\mathcal{A}$ ולכן $(f^{-1}[A])^c\in\mathcal{A}$

(כי $\mathcal{A}$ σ-אלג'), אולם: $(f^{-1}[A])^c=f^{-1}[A^c]$

מכיון ש f פונקציה מעל X. ולכן $A^c\in\mathcal{B}_f$.

ולכן $(Y,\mathcal{B}_f)$ מרחב מדיד.

2) צריך להראות כי ν היא מידה חיובית מעל $(Y, \mathcal{B}_f)$

נבדוק לפי ההגדרה.

א) לכל $E \in \mathcal{B}_f$ $\mu(f^{-1}[E]) \geq 0$ כי μ מידה חיובית

ולכן: $0 \leq \nu(E)$

ב) $f^{-1}[\phi] = \phi$ ו- $\mu(\phi) = 0$ כי μ מידה

לכן $\nu(\phi) = 0$

ג) יהיו $A_n \in \mathcal{B}_f$ זרות בזוגות

אזי $f^{-1}[A_n]$ זרות בזוגות (כי f פונקציה)
בפרט - מוגדרת היטב.

ואכן שμ מידה:

$$\nu(f^{-1}[\cup A_n]) = \nu(\cup f^{-1}[A_n]) = \mu(\cup f^{-1}[A_n]) = \sum \mu(f^{-1}[A_n]) = \sum \nu(A_n)$$

$$f^{-1}[\cup A_n] = \cup f^{-1}[A_n]$$

לכן $(Y, \mathcal{B}_f, \nu)$ היא מרחב מידה חיובית.

שאלה 3

1) נגדיר $F_n := \bigcap_{k\geq n} E_k \in \mathcal{A}$

$$F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \liminf E_n \in \mathcal{A}$$

מההגדרה נובע - $F_n \subseteq F_{n+1}$ (כלומר: F_n סדרה עולה של קבוצות)

לכן: $\forall n \quad F_n = F_1 \,\dot\cup\, (F_2\setminus F_1)\,\dot\cup\, \dots \,\dot\cup\,(F_n\setminus F_{n-1})$

וכל הקב' באיחוד הזר הן נפרדות.

מאדיטיביות μ:

$$\mu(F_n) = \mu(F_1) + \mu(F_2\setminus F_1) + \dots + \mu(F_n\setminus F_{n-1})$$

כמו כן:

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F_1 \,\dot\cup\, (F_2\setminus F_1)\,\dot\cup\, \dots$$

ולכן: $\mu(F) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu(F_1) + \mu(F_2\setminus F_1) + \mu(F_3\setminus F_2) + \dots$

סכום של טור = גבול הסכומים החלקיים $= \lim_{n\to\infty}\left\{\mu(F_1) + \mu(F_2\setminus F_1) + \dots + \mu(F_n\setminus F_{n-1})\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$$

כמו כן, לכל n: $F_n \subseteq E_n$, לכן - ממונוטוניות μ: $\mu(F_n) \leq \mu(E_n)$

ומכאן נסיק: $\mu(F) = \lim_{n\to\infty}\mu(F_n) \leq \liminf \mu(E_n)$.

בסה"כ $\mu(\liminf E_n) = \mu(F) \leq \liminf \mu(E_n)$

כנדרש.

(2 נגדיר:

$$F_n := \bigcup_{k\ge n} E_k \in \mathcal{A}$$

$$F := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \limsup E_n \in \mathcal{A}.$$

$F_{n+1} \subseteq F_n$ - סדרה יורדת ב $\mathcal{A}$

לפי הנתון, קיים n_0 כך ש- $\mu(F_{n_0}) < \infty$ $\left(\forall n\ge n_0 \quad \mu(F_n) \overset{F_n\subseteq F_{n_0}}{\le} \mu(F_{n_0})\right.$ מונוטונית$\left.\right)$

רציפות (1)

$$\mu(F) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \underset{F_n \text{ יורדת}}{=} \mu\left(F_{n_0} \setminus \left(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} (F_{n_0}\setminus F_n)\right)\right) \underset{\text{תכונה - חיסור}}{=} \mu(F_{n_0}) - \mu\Big(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} \underbrace{(F_{n_0}\setminus F_n)}_{\text{סדרה עולה}}\Big) =$$

$$= \mu(F_{n_0}) - \lim \mu(F_{n_0}\setminus F_n) = \mu(F_{n_0}) - \mu(F_{n_0}) + \lim \mu(F_n) = \lim \mu(F_n)$$

כעת, מהגדרת F_n נובע שלכל n: $E_n \subseteq F_n \underset{\text{מונוטוניות } \mu}{\Rightarrow} \mu(E_n) \le \mu(F_n)$

לכן גם

$$\mu(\limsup E_n) = \mu(F) = \lim \mu(F_n) \ge \limsup \mu(E_n).$$

כנדרש.

שאלה 4

נבדוק לפי ההגדרה:

(א) לכל $F\in\mathcal{A}$ $\quad 0 \overset{\mu \text{ חיובית}}{\le} \mu(F\cap S)$ ולכן $0 \le \nu(F)$ - חיובית.

(ב) $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset\cap S) = \mu(\emptyset) \underset{\mu \text{ מידה}}{=} 0$

(ג) תהי $\{F_n\}$ סדרת קבוצות מדידות-$\mathcal{A}$ זרות בזוגות.

אזי:

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu\left(S\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (S\cap F_n)\right) \underset{\sigma \text{ אדיטיביות } \mu}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S\cap F_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(F_n)$$

קיבלנו: ν מידה חיובית על $(X,\mathcal{A})$.