

פיסיקה למתמטיקאים 88-320

תרגיל 5

1. נתונה מטוטלת פוקו המורכבת מחוט חסר מסה באורך ℓ ומסה m בקצהו. המטוטלת ממוקמת בקו רוחב λ (ביחס לאופק) ונוטה בזווית θ . המהירות הזוויתית של כדור"א Ω .

(א) רשמו את הלגראנג'יאן של המטוטלת והראו כי הוא ניתן לכתיבה בצורה

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + 2\Omega \sin \lambda L + o(\Omega)$$

כאשר \mathcal{L}_0 לגראנג'יאן "רגיל" של מטוטלת בקורדינטות קרטזיות ו L התנע הזוויתי

(הדרכה: רשמו את מהירות המטוטלת ביחס למערכת האינרציאלית $\vec{v} = \vec{v}' + 2\vec{\Omega} \times \vec{r}$ כאשר $\vec{v}' = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$ והזניחו איברים $O(\Omega^2)$. השתמשו בקרוב תנודות קטנות עבור הפוטנציאל, כך ש $m\omega^2\ell^2 \cos \theta \approx m\omega^2\ell^2(1 - \frac{1}{2}\theta^2)$ כאשר $\omega^2 = g/\ell$. בנוסף $\ell^2\theta^2 \approx x^2 + y^2$.)

(א) כתבו את משוואות אויילר לגראנג' והשוו למשוואות התנועה שקיבלנו בכיתה.
 (ב) הוכיחו כי התנע הזוויתי אינו נשמר (רמז: שני לגראנג'יאנים $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ הנבדלים בקבוע, כלומר $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + const$, שומרים על משוואות התנועה)

(ג) מצאו גודל נשמר באמצעות משפט נתר (רמז: סיבוב אינפיניטיסימלי $x \rightarrow x + \epsilon y, y \rightarrow y - \epsilon x$)

2. הראו כי $r = 1, 2, 3, \dots$ ו $\lambda > 0$, פונקצית צפיפות הסתברות. חשבו את $std(X)$.
 (השתמשו בנוסחה $\int_0^\infty x^k e^{-ax} dx = \frac{k!}{a^{k+1}}$)

3. צפרדע קופצת מטר בכל פעם, ימינה בהסתברות $\frac{3}{4}$ ושמאלה בהסתברות $\frac{1}{4}$. מה ההסתברות שלאחר 10 קפיצות תימצא הצפרדע שני מטרים ימינה מנקודת המוצא ?

4. למתח של אות הנקלט בגלאי יש צפיפות נורמלית $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. נגדיר משתנה אקראי חדש $Y = 4X^2$. מצאו את צפיפות ההסתברות של Y , $h_Y(y)$.

(הדרכה: התבוננו בפונקצית ההצטברות $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds$ והביעו באמצעותה את ההסתברות $P\left(-\frac{\sqrt{y}}{2} \leq X \leq \frac{\sqrt{y}}{2}\right)$)