

## פיסיקה למתמטיקאים 88-320

### תרגיל 5

1. נתונה מטוטלת פוקו המורכבת מחוט חסר מסה באורך  $\ell$  ומסה  $m$  בקצהו. המטוטלת ממוקמת בקו רוחב  $\lambda$  (ביחס לאופק) ונוטה בזווית  $\theta$ . המהירות הזוויתית של כדור "א"  $\Omega$ .

(א) רשמו את הלגראנג'יאן של המטוטלת והראו כי הוא ניתן לכתיבה בצורה

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + 2\Omega \sin \lambda L + o(\Omega)$$

כאשר  $\mathcal{L}_0$  לגראנג'יאן "רגיל" של מטוטלת בקורדינטות קרטזיות ו  $L$  התנע הזוויתי

(הדרכה: רשמו את מהירות המטוטלת במערכת האינרציאלית ("הרגילה"),

כאשר  $\vec{v} = \vec{v}' + 2\vec{\Omega} \times \vec{r}$  והזניחו איברים  $O(\Omega^2)$ . השתמשו בקרוב תנודות קטנות עבור הפוטנציאל, כך ש  $m\omega^2 \ell^2 \cos \theta \approx m\omega^2 \ell^2 (1 - \frac{1}{2}\theta^2)$  כאשר  $\omega^2 = g/\ell$  בנוסף קחו  $\ell^2 \theta^2 \approx x^2 + y^2$ .

(א) כתבו את משוואות אויילר לגראנג' והשוו למשוואות התנועה שקיבלנו בכיתה.  
 (ב) הוכיחו כי התנע הזוויתי אינו נשמר (רמז: שני לגראנג'יאנים  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  הנבדלים בקבוע, כלומר  $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + const$ , שומרים על משוואות התנועה)

(ג) מצאו גודל נשמר באמצעות משפט נתר (רמז: סיבוב אינפיניטיסימלי  $x \rightarrow x + \epsilon y, y \rightarrow y - \epsilon x$ )

2. הראו כי  $f_X(x) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\lambda x}, x > 0$  ו  $r = 1, 2, 3, \dots$  פונקציית צפיפות הסתברות. חשבו את  $std(X)$ .

$$(\text{השתמשו בנוסחה } \int_0^\infty x^k e^{-ax} dx = \frac{k!}{a^{k+1}})$$

3. צפרדע קופצת מטר בכל פעם, ימינה בהסתברות  $\frac{3}{4}$  ושמאלה בהסתברות  $\frac{1}{4}$ . מה ההסתברות שלאחר 10 קפיצות תימצא הצפרדע שני מטרים ימינה מנקודת המוצא?

?

4. למתח של אות הנקלט בגלאי יש צפיפות נורמלית  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ . נגדיר משתנה אקראי חדש  $Y = 4X^2$ . מצאו את צפיפות ההסתברות של  $Y$ ,  $h_Y(y)$ .

(הדרכה: התבוננו בפונקצית ההצטברות  $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds$  והביעו באמצעותה את ההסתברות  $P\left(-\frac{\sqrt{y}}{2} \leq X \leq \frac{\sqrt{y}}{2}\right)$ )