תרגיל בית 1 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית
88-373 סמסטר ב' תשפ"א

תרגיל 1. יהי $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד, ותהי $A \subseteq \Omega$. הוכיחו כי $\mathcal{G} = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{F}\}$ היא σ-אלגברה על A.

תרגיל 2. תהי $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots$ שרשרת של σ-אלגברות על קבוצה Ω. הוכיחו או הפריכו: $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ היא σ-אלגברה.

תרגיל 3. יהיו $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ שתי σ-אלגברות על קבוצה Ω. הוכיחו: אם $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ היא אלגברה, אז היא σ-אלגברה.

תרגיל 4. יהי $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד, ותהי $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ פונקציה עליו. נניח ש-P מקיימת:

א. P אדיטיבית סופית.

ב. $P(\Omega) = 1$.

ג. אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה של מאורעות, אז $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ (במילים, P רציפה מלמטה).

הראו כי P היא σ-אדיטיבית, והסיקו כי P היא מידת הסתברות על $(\Omega, \mathcal{F})$.

תרגיל 5. בתרגיל זה ננסה להגדיר התפלגות "אחידה" על הטבעיים, וניכשל. עבור קבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ נגדיר את **צפיפות צזארו (Césaro)** שלה להיות

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, \ldots, n\}|}{n}$$

אם הגבול מוגדר. נסמן על ידי CES את אוסף תת-הקבוצות של $\mathbb{N}$ שקיימת להן צפיפות צזארו. הוכיחו כי CES אינה σ-אלגברה, ולמעשה – אפילו אינה אלגברה.

תרגיל 6. (מקור השם "אלגברה" של קבוצות).

א. קראו בוויקיפדיה את הגדרת המושג אלגברה מעל שדה (בקישור הזה).

ב. השתכנעו ש-$(P(\Omega), \Delta, \cap)$ היא אלגברה מעל השדה $\mathbb{Z}_2$. (צריך לוודא ש-$P(\Omega)$ עם הפעולות הנ"ל הוא חוג, להגדיר כפל בסקלר מ-$\mathbb{Z}_2$ כך ש-$P(\Omega)$ יהיה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Z}_2$, ולוודא ש-$\alpha(xy) = (\alpha x) y = x(\alpha y)$ לכל $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ ו-$x, y \in P(\Omega)$).

ג. הסבירו מדוע אלגברה של קבוצות על Ω כפי שהגדרנו אותה היא למעשה תת-אלגברה של $(P(\Omega), \Delta, \cap)$ מעל השדה $\mathbb{Z}_2$ (באלגברה זו איבר האפס הוא $\varnothing$, ואיבר היחידה הוא Ω).

ד. תעמידו פני מופתעים.