(88132) חשבון אינפינטסימלי 1 | מבחן תשע"ה מועד ב'

הצעת פתרון | לירן מנצורי יונתן סמידוברסקי

שאלה 1

הוכח את משפט ויירשטראס השני: כל פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת מקסימום ומינימום שם.

תהי f רציפה ב$[a,b]$, ראשית נראה שחסומה בקטע:
נניח בשלילה שהקב' $\{f(x)|x\in[a,b]\}$ אינה חסומה מלעיל
אז לכל n קיים $a\leq x_n\leq b$ כך ש$f(x_n)>n$
אבל $\{x_n\}$ חסומה לכן לפי בולצאנו ויירשטראס, יש לה ת"ס מתכנסת $x_{n_k}\to x_0$ וכן $a\leq x_0\leq b$
מרציפות f נקבל $f(x_{n_k})\to f(x_0)$, וזו סתירה כי $f(x_n)\to\infty$ והיא תת סדרה שלו.
כעת נראה שזהו המקסימום
מהוכחת חסומה מלעיל נקבל כי קיים $s:=sup\{f(x)|x\in[a,b]\}$
ניקח סדרה $s\geq f(x_n)\to s$, $a\leq x_n\leq b$ לכל n
יש לה ת"ס מתכנסת $x_{n_k}\to c$ ואז $s\leftarrow f(x_n)\to f(c)$ מרציפות,
ולפי יחידות הגבול $f(c)=s$ והיא נק' מקסימום גלובלית, באופן דומה מוכיחים מינמום.

שאלה 2

לכל אחד מהטורים הבאים, קבע האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר.

א. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{-3n^2+62n+1}{4n^5-26n^2+7}$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{10n+9\sin n}$.

סעיף א

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{-3n^2+62n+1}{4n^5-26n^2+6}$$

נראה התכנסות בהחלט

$$\frac{|-3n^2+62n+1|}{|4n^5-26n^2+6|} \leq \frac{|-3n^2|+|62n+1|}{|4n^5-26n^2+6|} \leq \frac{4n^2}{|4n^5-26n^2+6|}$$

כאשר המעבר האחרון קורה החל משלב מסויים ($n \geq 8$)

בצורה דומה מתקיים שהחל משלב מסויים $4n^5-26n^2+6>0$ ואז

$$\frac{4n^2}{4n^5-26n^2+6} \leq \frac{4n^2}{4n^5} = \frac{1}{n^3}$$

סך הכל עושים מבחן ההשוואה של זנב הטור ושל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ אשר מתכנס, **מתכנס בהחלט** וסיימנו.

סעיף ב

אפשר לראות שהטור חיובי, ולכן מתכנס בהחלט או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$$

כאשר המעבר השני נובע מכך ש: $n \geq 1 \Rightarrow n! \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n!} \geq 1$

ולכן **מתבדר** מהשוואה עם הטור ההרמוני

סעיף ג

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{10n+9nsin(n)}$$

נשים לב שהמכנה $10n+9sin(n)\geq 10n-9>0$ בתחום שלנו ($n\geq 1$)
ונראה לא מתכנס בהחלט

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n+9sin(n)}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n+9}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{19n}=\infty$$

כעת על מנת להוכיח התכנסות בתנאי, ניעזר בליבניץ ונוכיח ש $a_n:=\frac{1}{10n+9sin(n)}$ יורדת ומתכנסת לאפס.
התכנסות לאפס:

$$0\leftarrow\frac{1}{19n}\leq\frac{1}{10n+9}\leq\frac{1}{10n+9sin(n)}\leq\frac{1}{10n-9}\leq\frac{1}{10n}\rightarrow 0$$

a_n יורדת,
שקול ללהוכיח שהמכנה עולה, כלומר

$$10(n+1)+9sin(n+1)\geq 10n+9sin(n)$$

$$10\geq 9(sin(n)-sin(n+1)=9\cdot 2sin(\frac{n-(n+1)}{2})\cdot cos(\frac{n+(n+1)}{2})$$

$$9\cdot 2sin(\frac{-1}{2})\cdot cos(n+\frac{1}{2})=-8.63\cdot cos(n+\frac{1}{2})$$

אבל $-1\leq cos(n+\frac{1}{2})\leq 1$ וסיימנו, **מתכנס בתנאי.**

שאלה 3

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה שמתכנסת לגבול a הוכח שאם

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

לכל מספר טבעי n, אזי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

נראה לפי הגדרת הגבול, יהי $\epsilon > 0$ נמצא N שממנו ואילך

$$|b_n - a| \leq \epsilon$$

אבל מהנתון, בעבור אותו ϵ קיים N' כך שלכל $n \geq N'$ מתקיים $|a_n - a| \leq \epsilon$
ניקח $N := N'$ ונסתכל על זנב הסדרה, כלומר $n \geq N$

$$|b_n - a| = |\frac{a_1 + ... + a_n}{n} - a| = |\frac{a_1 + ... + an - an}{n}|$$

$$= |\frac{(a_1 - a) + ... + (a_m - a)}{n}| = |\frac{(a_1 - a) + ... + (a_N - a) + (a_{N+1} - a) + ... + (a_m - a)}{n}|$$

ומאי שיוויון המשולש

$$\leq \frac{1}{n}(|(a_1 - a) + ... + (a_{N-1} - a)| + |(a_N - a) + (a_{N+1} - a) + ... + (a_m - a)|)$$

$$\leq \frac{1}{n}|\epsilon + ... + \epsilon| \leq \frac{1}{n} \cdot n\epsilon = \epsilon$$

ולכן סיימנו.

שאלה 4

א. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. הגדר את המינוח "הפונקציה $f(x)$ **רציפה במידה שווה** בתחום A".

ב. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה במידה שווה בכל $\mathbb{R}$. הוכח שהפונקציה $f(x+5776)-f(x)$ הינה חסומה.

סעיף א

f תיקרא פונקציה רציפה במידה שווה בתחום A אם $A \subseteq dom(f)$ וגם

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x_1,x_2\in A,|x_1-x_2|\leq\delta}:|f(x_1)-f(x_2)|\leq\epsilon$$

(כתבתי את אחד הניסוחים השקולים שלה שיהיה לנו נוח יותר לעבוד איתו)

סעיף ב

מהנתון בפרט ניקח $\epsilon := 1$, קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|\leq 1$
יהי $k\in\mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{k}<\delta$, יהי $x\in\mathbb{R}$ כעת

$$|f(x+5776)-f(x)|$$

$$=|f(x+5776)-f(x+5776-\frac{1}{k})+f(x+5776-\frac{1}{k})-f(x+5776-\frac{2}{k})+f(x+5776-\frac{2}{k})+...-f(x+\frac{1}{k})+f(x+\frac{1}{k})-f(x)|$$

ומאי שיוויון המשולש

$$\leq|f(x+5776)-f(x+5776-\frac{1}{k})|+|f(x+5776-\frac{1}{k})-f(x+5776-\frac{2}{k})|+...+|f(x+\frac{2}{k})-f(x+\frac{1}{k})|+|f(x+\frac{1}{k})-f(x)|$$

כעת מרציפות במידה שווה של f

$$\leq 5776k\epsilon=5776k$$

מצאנו חסמים מלרע ומלעיל וסיימנו (הרי חוסם את הערך המוחלט)

שאלה 5

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בכל נקודה פנימית של הקטע הזה. נניח כי $f'(c) \neq 1$ לכל $c \in (a,b)$. נקודה c נקראית נקודת שבת של הפונקציה $f(x)$ אם $f(c) = c$. הוכח כי לפונקציה $f(x)$ יש לכל היותר נקודת שבת אחת בקטע $[a,b]$.

<u>הוכחה</u> נניח בשלילה קיימות 2 נק' שבת: c_1, c_2 שונות (לפחות שתיים) בעבורן: $f(c_1) = c_1, f(c_2) = c_2$
כעת נניח בלי הגבלת הכלליות ש$c_2 > c_1$, ונתבונן בתחום (c_1, c_2)
לפי משפט הערך הממוצע של לגרנז' מתקיים שקיימת c' בקטע $c' \in (c_1, c_2)$ כך ש

$$f'(c') = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1}$$

אבל

$$\frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 - c_1} = 1$$

בסתירה לכך ש$c' \in (a,b)$ ומקיימת $f'(c) = 1$