תרגיל 10

1. תהי A תת קבוצה של $[0,1]^2$ מדידה לבג (ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה) עם מידה $m_2(A)=1$ כאשר $m_2=m\times m$ ו m הינה מידת לבג. הראו כי כמעט לכל $x\in[0,1]$ הקבוצה $s_x(A)=\{y:(x,y)\in A\}$ הינה בעלת מידה $m(s_x(A))=1$.

פתרון: ברור כי הפונקציה 1_A הינה מדידה לבג ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה של $[0,1]^2$. כמו כן נובע כי

$$\int_{[0,1]^2} 1_A(x,y)dm_2(x,y)=m_2(A)=1<\infty$$

עפ"י משפט טונלי נקבל כי

$$\int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]}1_{s_x(A)}(x,y)m(dy)\right)m(dx)=\int_{[0,1]}m(s_x(A))m(dx)=1$$

נובע כי

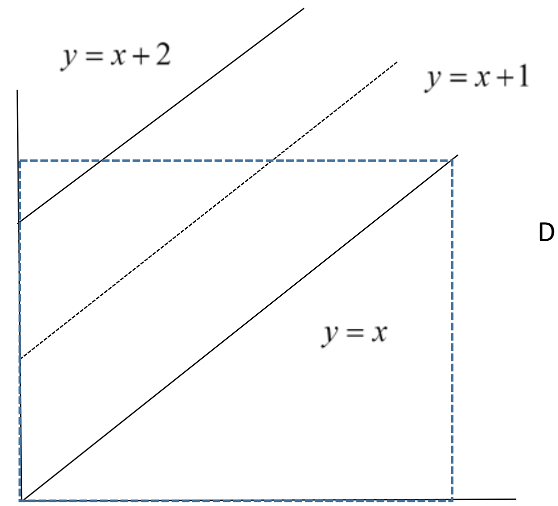
$$\int_{[0,1]}\left(1-m(s_x(A))\right)m(dx)=0$$

מכיוון ש $s_x(A)\subseteq[0,1]$ נובע כי $m(s_x(A))\le 1$ ולכן $1-m(s_x(A))\ge 0$ לכל $x\in[0,1]$.
ראינו כבר כי אם $f\ge 0$ כב"מ וגם $\int fd\mu=0$ אזי נובע כי $f=0$ כב"מ. מכאן ש $1-m(s_x(A))=0$ כב"מ ולכן $1=m(s_x(A))$ כב"מ.

2. יהי $X=Y=\mathbb{R}$ ונסתכל על $\mathbb{R}^2$ ביחס לסיגמא אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & x\ge 0 \text{ and } x\le y<x+1\\ -1 & x\ge 0 \text{ and } x+1\le y<x+2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

הראו כי $\int\int f(x,y)m(dy)m(dx)\neq\int\int f(x,y)m(dx)m(dy)$. מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?



נחשב

$$h(y) = \int f(x,y)\,m(dx) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \int_0^y 1dm = y & 0 \le y < 1 \\ \int_0^{y-1} -1dm + \int_{y-1}^{y} 1dm = 2 - y & 1 \le y < 2 \\ \int_{y-2}^{y-1} -1dm + \int_{y-1}^{y} 1dm = 0 & 2 \le y < \infty \end{cases}$$

ולכן

$$\int\int f(x,y)\,m(dx)m(dy) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)dm = \int_0^1 ym(dy) + \int_1^2 (2-y)\,m(dy) = 1$$

מצד שני,

$$g(x) = \int f(x,y)\,m(dy) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_x^{x+1} 1m(dy) + \int_{x+1}^{x+2} -1m(dy) = 0 & x \ge 0 \end{cases}$$

ולכן

$$\int\int f(x,y)\,m(dy)m(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dm = \int_{-\infty}^{\infty} 0dm = 0$$

ומכאן ש

$$1=\int\int f(x,y)m(dx)m(dy)\neq\int\int f(x,y)m(dy)m(dx)=0.$$

על מנת להראות כי אין סתירה למשפט פוביני, נראה כי $\int_{\mathbb{R}^2}\left|f(x,y)\right|dm\times dm=\infty$. נחשב את $\int_{D}\left|f(x,y)\right|dm\times dm$ כאשר D_x הינו הריבוע בציור שצלעו באורך x . ברור כי אינטגרל כפול על הפונקציה הינו השטח של הריבוע D_x פחות שני המשולשים. כלומר, אם גודל הריבוע הוא x^2 אזי

$\int_{D_x}\left|f(x,y)\right|dm\times dm=x^2-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{(x-2)^2}{2}\right)=2x-2$. עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית נובע כי $\int_{\mathbb{R}^2}\left|f(x,y)\right|dm\times dm=\lim_{x\to\infty}\int_{D_x}\left|f(x,y)\right|dm\times dm=\lim_{x\to\infty}2x-2=\infty$. מכאן כי תנאי משפט פוביני אינם מתקיימים ולכן אין סתירה.

3. הוכיחו כי $I=\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. רמז : חשבו קודם את I^2 וחשבו את האינטגרל הכפול ע"י מעבר לקורדינטות פולאריות .

פתרון : $I^2=\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dydx$. הפונקציה $f(x,y)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ הינה רציפה ולכן מדידה ביחס לסיגמא אלגברת לבג המכפלה. כמו כן היא חיובית ולכן ניתן להשתמש במשפט טונלי. לכן

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}m(dx)m(dy)=\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}m\times m(dx,dy)$$

מכיוון ש f רציפה היא אינטגרבילית רימן לפחות במובן הרחב (כלומר האינטגרל יכול להיות שווה ל ∞ . נוכל לעבור לקורדינאטות פולאריות

$$x^2+y^2=r^2$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

נקבל כי

$$I^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}}rdrd\theta=\frac{\pi}{2}$$

ומכאן ש $I=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.