

פתרון מבחן מועד ג' – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה – 17/05/23

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משך המבחן: שלוש שעות

מרצה: דר' ארז שיינר

כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100

ענו על כל השאלות

משקל כל שאלה: 20 נק'

יש לכתוב את התשובות על גבי טופס המבחן במקום המתאים בלבד. מותר לכתוב משני צידי הדף.

מחברות הטיוטה מושלכות ולא תבדקנה.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot \tan(3x)}{x^3 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{1}{\cos(3x)} \cdot 3 \cdot \frac{1}{1-x} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$$

ב. 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \sin(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{\sin(x)}{x}} = 1$$

חסומה חלקי אינסוף

ג. 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - n$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} + n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + n + 1) - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.

א. חשבו את  $\int \cos(x) e^{2 \cdot \sin(x)} dx$ .

$$\int \cos(x) e^{2 \sin(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 2 \sin(x) \\ dt = 2 \cos(x) dx \\ \frac{1}{2} dt = \cos(x) dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{2 \sin(x)} + C$$

ב. חשבו את האינטגרל הבא  $\int_0^\infty \frac{\sin(e^{-x})}{e^x} dx$ .

$$\int_0^\infty \frac{\sin(e^{-x})}{e^x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\sin(e^{-x})}{e^x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sin(e^{-x}) e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{-x} \\ du = -e^{-x} dx \end{array} \right\} =$$
$$= \lim_{t \rightarrow \infty} - \int_1^{e^{-t}} \sin(u) du = \lim_{t \rightarrow \infty} \cos(e^{-t}) - \cos(1) = 1 - \cos(1)$$

3.

א. מה הערך המינימלי של הפונקציה  $f(x) = \ln^2(x-1)$ .

ראשית כדאי לשים לב לתחום ההגדרה  $x > 1$

$$f'(x) = 2 \ln(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}$$

סימן הנגזרת נקבע ע"י הלוג, שהוא חיובי כאשר  $x > 2$  ושילילי בתחום  $1 < x < 2$

לכן הפונקציה עולה בתחום  $[2, \infty)$  ויורדת בתחום  $(1, 2]$

והערך המינימלי הגלובאלי שלה מתקבל בנקודה  $x = 2$  ולכן הוא שווה ל

$$f(2) = 0$$

ב. מצאו לכל ערך של  $a$  כמה פתרונות יש למשוואה  $\ln^2(x-1) = a$ .

מסעיף א', לכל  $a < 0$  אין פתרון למשוואה.

עבור  $a = 0$  יש פתרון יחיד למשוואה והוא  $x = 2$

לכל  $a > 0$  צריך לפתור.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = \ln^2(x-1) - a$$

תחומי העלייה והירידה שלה זהים לסעיף א' כי  $h' = f'$

$$h(2) = -a < 0$$

כיוון שאי אפשר להציב את הקצוות האחרים  $1, \infty$  נחשב גבולות

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln^2(x-1) - a = \{(-\infty)^2 - a\} = \infty$$

לכן יש נקודה חיובית בתחום  $(1, 2]$  ולפי משפט ערך הביניים כיוון שהפונקציה רציפה כצירוף רציפות יש נקודת חיתוך בתחום  $(1, 2)$  בין הנקודה החיובית לנקודה השלילית. אין יותר מחיתוך אחד בתחום זה כיוון שהפונקציה מונוטונית בתחום זה.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln^2(x-1) - a = \infty$$

יש חיתוך נוסף בתחום  $(2, \infty)$  וסה"כ יש בדיוק שני חיתוכים, כלומר שני פתרונות למשוואה המקורית.

הערה: בתרגיל זה, בטעות מחבר המבחן, ניתן לפתור את השאלה באופן אלגברי לחלוטין, תשובה זו הייתה מקבלת את מלוא הנקודות.

4. תהיינה  $f, g$  פונקציות כך ש  $f$  גזירה ב  $x = 0$ ,  $f(0) = 0$  וכן  $g$  אינה גזירה ב  $x = 0$ .

א. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה  $h(x) = f(x) + g(x)$  אינה גזירה ב  $x = 0$ .

$h$  גזירה באפס אם גבול שיפועי המיתרים קיים וסופי

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x) - f(0) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}}_{\rightarrow f'(0)} + \underbrace{\frac{g(x) - g(0)}{x - 0}}_{\text{אין גבול סופי}}$$

סכום ביטויים שלאחד מהם יש גבול סופי ולשני אין גבול סופי, הוא ביטוי שאין לו גבול סופי.

הוכחה להערה האחרונה (אוכיח בסדרות, אבל ההוכחה בפונקציות דיי זהה):

נב"ש כי  $a_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$  וכן לסדרה  $b_n$  אין גבול וכן  $a_n + b_n \rightarrow M \in \mathbb{R}$

$$b_n = a_n + b_n - a_n \rightarrow M - L \in \mathbb{R}$$

בסתירה לכך שלסדרה  $b_n$  אין גבול.

ב. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה  $h(x) = g(f(x))$  אינה גזירה ב  $x = 0$ .

הפרכה:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = |x|$$

מקיימות את הנתונים אבל

$$h(x) = g(f(x)) = |x^2| = x^2$$

שהיא אכן גזירה ב  $x = 0$ .

5. תהי סדרה  $a_n$  המקיימת לכל  $n$  כי  $a_{n+1} = 2a_n - 3$ .

א. קבעו והוכיחו לכל ערך של  $a_1$  האם הסדרה מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת.

נביט בהפרש

$$a_{n+1} - a_n = a_n - 3$$

אם  $a_n > 3$  לכל  $n$  הסדרה עולה, אם  $a_n < 3$  לכל  $n$  הסדרה יורדת, ואם  $a_n = 3$  לכל  $n$  הסדרה קבועה כלומר עולה ויורדת.

שימו לב: מי אמר שאחת משלושת האופציות בכלל מתקיימת? כלומר ייתכן שלפעמים הסדרה גדולה מ-3, ולפעמים קטנה מ-3.

נוכיח באינדוקציות שהאיבר הראשון קובע את כל הסדרה באופן הבא:

נניח  $a_1 > 3$  ונוכיח כי לכל  $n$  מתקיים כי  $a_n > 3$  (ולכן הסדרה עולה)

בדיקה: הנחנו כי  $a_1 > 3$ . יהי  $n$  עבורו  $a_n > 3$  לכן

$$a_{n+1} = 2a_n - 3 > 6 - 3 = 3$$

עם הוכחה דומה מטפלים גם במקרים האחרים ורואים שאם  $a_1 < 3$  כל הסדרה קטנה מ-3 ולכן יורדת

ואם  $a_1 = 3$  הסדרה קבועה 3.

ב. מצאו את גבול הסדרה לכל ערך של  $a_1$ .

עבור  $a_1 = 3$  ברור כי גבול הסדרה הוא 3.

עבור  $a_1 < 3$  הסדרה יורדת ולכן חסומה ומתכנסת לגבול סופי, או שאינה חסומה ושואפת לאינסוף.

אם הסדרה חסומה היא מתכנסת ונסמן  $a_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim 2a_n - 3$$

$$L = 2L - 3$$

$$L = 3$$

כיוון שהסדרה יורדת,  $L \leq a_1 < 3$  בסתירה.

לכן הסדרה אינה חסומה, ולכן  $a_n \rightarrow -\infty$

אם  $a_1 > 3$  אז באופן דומה אפשר להוכיח כי  $a_n \rightarrow \infty$

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n}$$

זו סדרת סכומי רימן של הפונקציה  $f(x) = x$  הרציפה בקטע  $[0,1]$  ולכן לפי המשפט מהכיתה סדרת סכומי הרימן מצורה זו מתכנסת לאינטגרל המסויים

$$a_n \rightarrow \int_0^1 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

ב. קרבו את  $\sqrt{15}$  עד כדי שגיאה של  $h = \frac{1}{100}$ .

נקרב באמצעות טיילור את הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x}$  סביב נקודת ההשקה המצוייה  $x_0 = 16$  בנקודה הרצוייה  $x = 15$

נחש  $n = 4$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(\sqrt{x})^3}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8(\sqrt{x})^5}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16(\sqrt{x})^7}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}} = \frac{105}{32(\sqrt{x})^9}$$

כעת לפי לגראנז' קיימת נקודה  $15 < c < 16$  עבורה השארית היא

$$R_4 = \frac{f^{(5)}(c)}{5!} (15 - 16)^5 = \frac{105}{5! \cdot 32(\sqrt{c})^9} \cdot (-1)$$

$$|R_4| = \frac{105}{120 \cdot 32} \cdot \frac{1}{(\sqrt{c})^9} < \frac{105}{120 \cdot 32} \cdot \frac{1}{(\sqrt{15})^9}$$

כיוון שהקטנו את המכנה, הגדלנו את הביטוי.

שימו לב, אסור להציב את הביטוי הזה במחשבון, הרי מלכתחילה  $\sqrt{15}$  הוא מה שאין אנו יודעים.

נקטין עוד יותר את המכנה לכיוון ביטוי בר חישוב

$$|R_4| < \frac{105}{120 \cdot 32} \cdot \frac{1}{(\sqrt{9})^9} = \frac{105}{120 \cdot 32} \cdot \frac{1}{3^9} < \frac{1}{100}$$

לכן  $n = 4$  מתאים, וכעת נחשב את פולינום טיילור על מנת למצוא את הקירוב.

$$P_4(x) = f(16) + f'(16)(x - 16) + \dots + \frac{f^{(4)}(16)}{4!}(x - 16)^4$$

כיוון שבכל הנגזרות מופיע  $\sqrt{16} = 4$  אנחנו יודעים לחשב אותן כמספר רציונאלי, כעת נציב:

$$P_4(x) = 4 + \frac{1}{8}(x - 16) - \frac{4 \cdot 4^3}{2!}(x - 16)^2 + \frac{8 \cdot 4^5}{3!}(x - 16)^3 - \frac{16 \cdot 4^7}{4!}(x - 16)^4$$

וסה"כ הקירוב שלנו הוא

$$\sqrt{15} \approx 4 + \frac{1}{8}(15 - 16) - \frac{4 \cdot 4^3}{2!}(15 - 16)^2 + \frac{8 \cdot 4^5}{3!}(15 - 16)^3 - \frac{16 \cdot 4^7}{4!}(15 - 16)^4$$