

שאלת אתגר 5 – 88-112 אלגברה לינארית 1

סמסטר א' תשע"ו

נובמבר 2015

שדות הם ההכללה הטבעית של \mathbb{R} – יש להם ארבע פעולות חשבון שמתנהגות כמו שהיינו רוצים שיתנהגו (טוב, לפחות בדרך כלל). אבל על \mathbb{R} יש לנו עוד מבנים, כמו יחס הסדר (המלא) \leq המוגדר לנו. בתרגיל הזה נשאל את עצמנו על אילו שדות אפשר להגדיר כזה יחס סדר נחמד.

הגדרה 1. שדה סדור הוא שדה \mathbb{F} יחד עם יחס סדר מלא \leq על \mathbb{F} ה"מכבד" את פעולות השדה:

1. לכל $x, y, z \in \mathbb{F}$, אם $x \leq y$ אזי $x + z \leq y + z$. בנוסחה:

$$\forall x, y \in \mathbb{F} : x \leq y \longrightarrow (\forall z \in \mathbb{F} : x + z \leq y + z)$$

2. לכל $x, y, z \in \mathbb{F}$, אם $x \leq y$ וגם $0 \leq z$ אזי $xz \leq yz$. בנוסחה:

$$\forall x, y \in \mathbb{F} : x \leq y \longrightarrow (\forall z \in \mathbb{F} : 0 \leq z \longrightarrow xz \leq yz)$$

אם קיים יחס סדר \leq כך ש- \mathbb{F} עם \leq הוא שדה סדור, אומרים ש- \mathbb{F} הוא שדה ניתן לסידור.

דוגמה 2. \mathbb{Q} ו- \mathbb{R} הם שדות סדורים עם יחס הסדר המוכר והאהוב. לכן, \mathbb{Q} ו- \mathbb{R} הם שדות הניתנים לסידור.

שאלה 3. יהי \mathbb{F} שדה סדור עם יחס הסדר \leq . הוכיחו את התכונות הבאות:

א. $0 \leq 1$.

ב. לכל $x \in \mathbb{F}$, $0 \leq x^2$.

ג. לכל $x \in \mathbb{F}$, $0 \leq x$ או $0 \leq -x$.

ד. $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$.

(הדרכה: הניחו בשלילה שהמאפיין חיובי, והסתכלו על האיברים $0, 1, 1 + 1, \dots$. הראו שכל אחד קטן מהבא אחריו. כיוון שהמאפיין חיובי, מתישהו מקבלים שוב את 0. הגיעו לסתירה)

ה. מסקנה מסעיף 4: כל שדה סדור הוא אינסופי (כי בשדה סופי, המאפיין חיובי).

הרעיון של השאלה הבאה הוא לאפיין שדות הניתנים לסידור על ידי קבוצת האיברים האי-שליליים שלהם.

שאלה 4. יהי \mathbb{F} שדה כלשהו.

א. נגדיר $P = \{x \in \mathbb{F} | x \geq 0\}$. הוכיחו את התכונות הבאות:

- $0 \in P$
- P סגורה לחיבור ולכפל. כלומר, לכל $x, y \in P$, $x + y \in P$ וגם $xy \in P$.
- לכל $x \in \mathbb{F}$, $x \in P$ או $-x \in P$.

ב. הוכיחו: אם קיימת $P \subseteq \mathbb{F}$ המקיימת את התכונות הנ"ל, כלומר:

- $0 \in P$
- P סגורה לחיבור ולכפל. כלומר, לכל $x, y \in P$, $x + y \in P$ וגם $xy \in P$.
- לכל $x \in \mathbb{F}$, $x \in P$ או $-x \in P$.

אזי \mathbb{F} הוא שדה ניתן לסידור, ו- P היא קבוצת האיברים האי-שליליים בו.

שאלה 5. הוכיחו: לא ניתן להגדיר יחס סדר מלא על \mathbb{C} כך ש- \mathbb{C} יהיה שדה סדור.

הדרכה לשאלה 4 סעיף ב'. חשבו כמו ב- \mathbb{R} $x \leq y \iff 0 \leq y - x$.

הדרכה לשאלה 5. היעזרו בשאלה 4, וחשבו על i .