תרגיל 8

1. תזכורת: בתרגול הגדרנו חזקות סודרים ברקורסיה באופן הבא:
עבור $\alpha \neq 0$

$$\alpha^{\beta} = \begin{cases} 1 & \beta = 0 \\ \alpha^{\gamma} \cdot \alpha & \beta = \gamma + 1 \\ \sup_{\gamma < \alpha} \{\alpha^{\gamma}\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

הוכיחו באמצעות משפט ההגדרה ברקורסיה שהפונקציה הרקורסיבית $f(\beta) = \alpha^{\beta}$ אכן מגדירה פונקציה $f : ON \to ON$. כלומר, מצאו את הפונקציות F, G המתאימות מהמשפט.

2. תהי D קבוצה לא ריקה של קבוצות. הוכיחו ש $\bigcap D = \{x | \forall B \in D, x \in B\}$ הוא קבוצה. (שימו לב, שבניגוד לאקסיומת האיחוד, כאן יש לדרוש שהקבוצה אינה ריקה)

3. יהיו A, B קבוצות. הוכיחו שA^B כלומר, אוסף כל הפו' מA לB הוא קבוצה.
פתרון:
נשים לב ש

$$A^B = \{R : dom(R) = A \wedge (a,b), (a,c) \in R \Rightarrow b = c\}$$

קבוצת כל היחסים החד ערכיים והשלמים מA לB.כלומר,

$$A^B = \{R \subseteq A \times B : dom(R) = A \wedge (a,b), (a,c) \in R \Rightarrow b = c\}$$

$$\Downarrow$$

$$A^B = \{R \in P(A \times B) : [\forall a \in A \exists b \in B : (a,b) \in R] \wedge [(a,b), (a,c) \in R \Rightarrow b = c]\}$$

אם AוB קבוצות, אז ראינו בתרגול ש $A \times B$ קבוצה. לכן מאקסיומת קבוצת החזקה גם $P(A \times B)$ קבוצה. ואז מהפרדה על $P(A \times B)$ נקבל ש A^B קבוצה.

4. הוכיחו שאוסף כל הנקודונים (קבוצות מגודל 1) אינו קבוצה.