<u>**מרחבים וקטורים:**</u>

<u>**מ"ו-הגדרה:**</u> קבוצה V

עם פעולה $+_V$ (**חיבור וקטורי**) המוגדרת על V ופעולה $\cdot_{\mathbb{F}V}:\mathbb{F}\times V\to V$ (**כפל סקלרי**) נקראת **מרחב וקטורי מעל השדה** $\mathbb{F}$ אם מתקיימות התכונות הבאות:

1 **מוגדרות החיבור**. לכל $u,v\in V$ מתקיים $u+_V v\in V$,

2 **קיבוץ**. לכל $u,v,w\in V$ מתקיים $(u+_V v)+_V w=u+_V(v+_V w)$,

3 **חילוף**. לכל $u,v\in V$ מתקיים $u+_V v=v+_V u$,

4 **איבר נייטרלי**. קיים איבר $0_V\in V$ כך שלכל $v\in V$ מתקיים $v+0_V=v$,

5 **איבר נגדי**. לכל $v\in V$ קיים $-v\in V$ כך ש $v+_V(-v)=0_V$.

6 **תכונות הכפל הסקלרי**:

א. **מוגדרות**. לכל $v\in V$ ו $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}v\in V$,

ב. **קיבוץ**. לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ולכל $v\in V$ מתקיים $(\alpha\cdot_{\mathbb{F}}\beta)\cdot_{\mathbb{F}V}v=\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}(\beta\cdot_{\mathbb{F}V}v)$,

ג. **כפל יחידה**. לכל $v\in V$ מתקיים $1\cdot_{\mathbb{F}V}v=v$.

ד. **פילוג**.

(i) לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ ולכל $u,v\in V$ מתקיים $\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}(u+v)=\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}u+\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}v$,

(ii) לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ולכל $v\in V$ מתקיים $(\alpha+\beta)\cdot_{\mathbb{F}V}v=\alpha\cdot_{\mathbb{F}V}v+\beta\cdot_{\mathbb{F}V}v$.

אברי הקבוצה V נקראים **וקטורים**, ואברי השדה $\mathbb{F}$ נקראים **סְקָלָרִים**.

1.2 תרגיל. יהא $\mathbb{R}^2$ עם פעולת חיבור וקטורים הרגילה. בכל אחד מהסעיפים הבאים מוצעת הגדרה לכפל בסקלר. בדוק האם ההצעה אכן נותנת מרחב וקטורי.

א. $\alpha(x,y):=(\alpha x,y)$.

ב. $\alpha(x,y):=(\alpha^2x,\alpha^2y)$.

פתרון:

א. לא, כי <u>ד2</u> לא מתקיים:

$$(k+h)(x,y)=((k+h)x,y)=(kx+hx,y)\neq k(x,y)+h(x,y)=(kx,y)+(hx,y)=((k+h)x,2y)$$

ב. לא, כי <u>ד2</u> לא מתקיים:

$$(h+k)(x,y)=((h^2+2hk+k^2)x,(h^2+2hk+k^2)y)\neq h(x,y)+k(x,y)=((h^2+k^2)x,(h^2+k^2)y)$$

מכפלה קרטזית-הגדרה
יהיו B,A קבוצות, אזי המכפלה הקרטזית בין A ל-B היא:
$A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$, כלומר כל הוקטורים הדו-מימדיים כך שהקואורדינטה הראשונה מגיעה מהקבוצה הראשונה במכפלה והקואורדינטה השניה מהקבוצה השניה במכפלה.

הכללה: יהיו $A_1,...,A_n$ קבוצות, אזי המכפלה הקרטזית ביניהן היא:
$A_1\times\ldots\times A_n=\{(a_1,...,a_n):a_i\in A_i\quad\forall i=1,...,n\}$, כלומר כל הוקטורים ה-n-מימדיים כך שהקואורדינטה במקום ה-i מגיעה מהקבוצה במקום ה-i במכפלה.

תכונה: מכפלה קרטזית היא מ"ו כאשר המוכפלים הם מ"ו מעל אותו שדה עם הפעולות:
- סכום וקטורים לפי רכיבים $(u_1,v_1)+(u_2,v_2):=(u_1+_Uu_2,v_1+_Vv_2)$,
- כפל סקלארי – גם לפי רכיבים $\alpha(u,v):=(\alpha u,\alpha v)$.

תת מרחב-הגדרה
יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. נאמר ש W **תת-מרחב** של V אם:
1. $\emptyset\neq W\subseteq V$,
2. הקבוצה W היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ביחס לפעולת החיבור $+_V$ של V, והכפל הסקלרי $\cdot_{\mathbb{F}V}$.

2.1 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהא W תת-מרחב של V. הוכח: $0_W=0_V$.

פתרון:

$$0_V\underset{V-\text{ב}}{=}0_F\cdot 0_W\underset{W-\text{ב}}{=}0_W$$

2.9 תרגיל. יהא $V=\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח שכל אחת מהקבוצות הבאות מהווה תת-מרחב של V (ביחס לפעולות של V):

א. המטריצות הסימטריות.

[ב. המטריצות האנטי-סימטריות]

ג. המטריצות האלכסוניות.

ד. המטריצות המשולשיות עליונות.

ה. המטריצות A עם $\mathrm{tr}(A)=0$.

ו. המטריצות הסקלריות.

ז. מטריצות מהצורה $O\oplus A=\begin{pmatrix} O & O\\ O & A\end{pmatrix}$. ($A\in\mathbb{F}^{k\times k}$ כאשר $k<n$).

פתרון:

א. $\underset{\text{סימטרית}}{A,B},\quad k\in F \Rightarrow (A+kB)^t = A^t + kB^t = A+kB$

ב. $\underset{\substack{\text{אנטי}\\ \text{סימטרית}}}{A,B},\quad k\in F \Rightarrow (A+kB)^t = A^t + kB^t = -(A+kB)$

ג.

$$\underset{\text{אלכסוניות}}{A=(a_{ij}),B=(b_{ij})} \Rightarrow \forall i\neq j \quad a_{ij},b_{ij}=0 \quad k\in F \Rightarrow A+kB=(a_{ij}+kb_{ij}) : \forall i\neq j \quad a_{ij}+kb_{ij}=0$$

$$\Rightarrow \text{אלכסוניות} \quad A+kB$$

ד.

$$\underset{\substack{\text{משולשיות}\\ \text{עליונות}}}{A=(a_{ij}),B=(b_{ij})} \Rightarrow \forall i> j \quad a_{ij},b_{ij}=0 \quad k\in F \Rightarrow A+kB=(a_{ij}+kb_{ij}) : \forall i> j \quad a_{ij}+kb_{ij}=0$$

$$\Rightarrow \substack{\text{משולשית}\\ \text{עליונה}} \quad A+kB$$

ה. $k\in F, A,B\in F^{nxn} : tr(A),tr(B)=0 \Rightarrow tr(A+kB)=tr(A)+n\cdot k\cdot tr(B)=0$

ו.

$$\underset{\text{סקלריות}}{A=(a_{ij}),B=(b_{ij})} \Rightarrow \begin{cases} \forall i\neq j \quad a_{ij},b_{ij}=0 \\ a_{ii}=\alpha, b_{ii}=\beta \quad \forall i=1,\dots,n \end{cases} \qquad \alpha,\beta,k\in F \Rightarrow$$

$$A+kB=(a_{ij}+kb_{ij}) : \begin{cases} \forall i\neq j \quad a_{ij}+kb_{ij}=0 \\ a_{ii}+kb_{ii}=\alpha+k\beta \quad \forall i=1,\dots,n \end{cases} \Rightarrow \text{סקלרית} \quad A+kB$$

ז. תהיינה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} : A\in F^{kxk}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : B\in F^{mxm}, \qquad k,m<n$$

אזי:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A+\alpha B \end{pmatrix} :$$

$$A+\alpha B\in F^{(\max(k,m))\times(\max(k,m))} \qquad \wedge \quad \max(k,m)<n$$

2.10 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ונגדיר $V_A:=\{B\in\mathbb{F}^{n\times n} : BA=AB\}$.

א. הוכח ש V_A תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

ב. הוכח ש V_A סגור גם לכפל מטריצות.

פתרון:

א.
$$B,C\in V_a \Rightarrow (B+kC)A = BA+kCA = AB+kAC = AB+AkC = A(B+kC) \Rightarrow B+kC\in V_a$$
ב. $B,C\in V_a \Rightarrow (BC)A = B(CA) = B(AC) = (BA)C = (AB)C = A(BC) \Rightarrow BC\in V_a$

3.3 תרגיל. יהיו $U, W\subseteq V$ תת-מרחבים. הוכח: כל תת-מרחב של V המוכל ב $U\cup W$ מוכל כולו ב U ו/או ב W.

הוכחה: נניח בשלילה ש'V איננו מוכל באחד מת"מ אלו , אזי
$$\exists u\in V'\setminus W \wedge \exists w\in V'\setminus U (\Rightarrow u\in U \wedge w\in W)$$
נתבונן ב- $u+w\notin U,W$ (אחרת u=u+w-w יהיה ב-W וכנ"ל ל-w ב-U) ולכן $u+w\notin V'$
בסתירה לכך ש- $u,w\in V'$ ו-'V מ"ו.

3.4 תרגיל. יהי $V=\mathbb{F}^{n\times n}$. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונים שני תת-מרחבים U, W של V. עבור כל אחד מהם, בצע את סדרת הבדיקות הבאה:

- תאר את $U\cap W$,
- הוכח ש $W\subseteq U$ או $U\subseteq W$; **ואם לא** – הראה ש $U\cup W$ **אינו מ"ו** ע"י שתיקח $u,w\in U\cup W$ כך ש $u\notin W$, $w\notin U$, ותראה (ישירות) ש $u+w\notin U\cup W$.

א. U – המטריצות הסימטריות; W – המטריצות האלכסוניות.

ד. U – המטריצות הסקלריות (כלומר מהצורה αI עבור $\alpha\in F$); W – מטריצות מהצורה $O\oplus A=\begin{pmatrix} O & O \\ O & A\end{pmatrix}$. ($A$ מטריצה $k\times k$ כאשר $k<n$).

פתרון:

א. $$U\cap W = \{A=(a_{ij})\in F^{nxn} : A=A^t \wedge \forall i\neq j \quad a_{ij}=0\}$$
$$A=(a_{ij})\in W \Rightarrow \forall i\neq j \quad a_{ij}=0 \Rightarrow \forall i\neq j \quad a_{ij}=a_{ji}=0 \Rightarrow A\in U$$
ולכן $W\subseteq U$

ד.
$$U\cap W = \left\{A\in F^{nxn} : \exists\alpha\in F : \begin{cases}\forall i\neq j & a_{ij}=0 \\ \forall i=1,\dots,n & a_{ii}=\alpha\end{cases} \wedge \exists A'\in F^{kxk} : A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & A'\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\in U\subseteq U\cup W, \begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\in W\subseteq U\cup W. \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}\notin U,W \Rightarrow \begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}\notin U\cup W$$
ולכן האיחוד איננו ת"מ.

סכום תתי מרחבים-הגדרה

יהא V מרחב וקטורי, ויהיו U,W תת-מרחבים של V. **הסכום** $U+W$ מוגדר ע"י:

$$.U+W=\{u+w\ :\ u\in U,\ w\in W\}$$

אם $U\cap W=\{0\}$, נאמר שהסכום $U+W$ הוא **ישר** (ונכתוב $U\oplus W$).

תרגילים:

4.5 תרגיל. יהיו

$$.U=\{(a_1,a_2,\dots,a_n)\ :\ a_1=a_2=\dots=a_n\}\ ;V=\{(a_1,a_2,\dots,a_n)\ :\ a_1+a_2+\dots+a_n=0\}$$

[א. הוכח ש U,V תת-מרחבים של $\mathbb{F}^n$]

ב. הוכח: $\mathbb{F}^n=U\oplus V$.

ג. עבור מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נגדיר $\Delta A:=(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})\in\mathbb{F}^n$. יהא U תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$, ונגדיר $U_\triangle:=\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}\ :\ \Delta A\in U\}$. הוכח ש $U_\triangle$ תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$.

ד. עבור המרחבים U,V הנ"ל: האם $U_\triangle\oplus V_\triangle=\mathbb{F}^{n\times n}$?

פתרון:

א. טריוויאלי.

ב. נחפש זוג וקטורים כללי מ-V ומ-U אשר יבטאו וקטור כללי מ F^n. כלומר:

$$\forall v=\begin{pmatrix}v_1 & \dots & v_n\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}v_1 & \dots & v_n\end{pmatrix}=(k,\dots,k)+\begin{pmatrix}v_1-k & \dots & v_n-k\end{pmatrix}:\sum(v_i-k)=\sum v_i-nk=0\Rightarrow$$

$$k=\underbrace{\frac{\sum v_i}{k}}_{\text{ממוצע הקואורדינאטות}}$$

ולכן:

$$\forall v=\begin{pmatrix}v_1 & \dots & v_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}v_1 & \dots & v_n\end{pmatrix}=\left(\frac{\sum v_i}{n},\dots,\frac{\sum v_i}{n}\right)+\left(v_1-\frac{\sum v_i}{n}\ \dots\ v_n-\frac{\sum v_i}{n}\right):\quad \left(\frac{\sum v_i}{n},\dots,\frac{\sum v_i}{n}\right)\in U\wedge\left(v_1-\frac{\sum v_i}{n}\ \dots\ v_n-\frac{\sum v_i}{n}\right)\in V$$

לגבי החיתוך:

$$\begin{pmatrix}v_1 & \dots & v_n\end{pmatrix}\in V\cap U\Rightarrow nv_1=0\Rightarrow\forall i\qquad v_i=0\Rightarrow\begin{pmatrix}v_1 & \dots & v_n\end{pmatrix}=0$$

ג.

$$\forall A,B\in U_\Delta \qquad \underbrace{\exists(a_{11}\ \dots\ a_{nn}),(b_{11}\ \dots\ b_{nn})}_{A,B\ \text{אלכסונים של}} \in \Delta A$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(a_{11}\ \dots\ a_{nn})+k(b_{11}\ \dots\ b_{nn})}_{A+kB\ \text{אלכסון של}} \in \Delta(A) \Rightarrow A+kB\in U_\Delta$$

ד. לא: $0\neq A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\wedge A\in U_\Delta\cap V_\Delta$

4.7 תרגיל. יהא V מרחב כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ויהיו U – **הפונקציות הזוגיות** (אלו המקיימות $f(-x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$), ו W – מרחב **הפונקציות האיזוגיות** (אלו המקיימות $f(-x)=-f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$).

[א. הוכח ש V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$]

[ב. הוכח ש U,W תת-מרחבים של V]

ג. הוכח: $V=U\oplus W$. (באלים: כל פונקציה ניתנת להצגה בצורה יחידה כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית)

פתרון:

א.

$$\forall f,g\in V,k\in R\Rightarrow\forall x\in R \qquad (f+kg)(x)=f(x)+kg(x)\in R\Rightarrow f+kg:R\to R\Rightarrow f+kg\in V$$

קיום האפס והנגדי נובעים מכך ותכונות הקומוטטיביות (לחיבור), דיסטרובוטיביות ואסוציאטיביות ידועות עבור פונקציות.

ב.

$$f(x)=f(-x),g(x)=g(-x)\Rightarrow\forall k\in R \qquad (f+kg)(x)=f(x)+kg(x)=f(-x)+kg(-x)=(f+kg)(-x)$$
$$\Rightarrow U\ \text{ת"מ}$$

$$-f(x)=f(-x),-g(x)=g(-x)\Rightarrow\forall k\in R \qquad -(f+kg)(x)=-f(x)-kg(x)=f(-x)+kg(-x)=(f+kg)(-x)$$
$$\Rightarrow U\ \text{ת"מ}$$

ג.

$+$:

$$\forall g(x)\in V \qquad g(x)=\frac{\overbrace{g(x)+g(-x)}^{h(x)}+\overbrace{g(x)-g(-x)}^{f(x)}}{2}:\begin{cases}\dfrac{h(x)}{2}=\dfrac{g(x)+g(-x)}{2}=\dfrac{g(-x)+g(x)}{2}=\dfrac{h(-x)}{2}\Rightarrow\dfrac{h}{2}\in U\\[2ex]\dfrac{f(x)}{2}=\dfrac{g(x)-g(-x)}{2}=\dfrac{-(g(-x)+g(x))}{2}=\dfrac{-f(-x)}{2}\Rightarrow\dfrac{f}{2}\in W\end{cases}$$

$$\cap: g\in U\cap W\Rightarrow\forall x\in R \qquad g(x)=g(-x)=-g(x)\Rightarrow 2g(x)=0\Rightarrow g(x)=0\forall x\in R\Rightarrow g=0$$

4.10 תרגיל. יהיו U, V מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$. הוכח: $U\times V=(U\times\{0_V\})\oplus(\{0_U\}\times V)$.

$$+:$$

$$\forall(u,v)\in U\times V \qquad (u,v)=(u,0)+(0,v)\in(U\times 0)+(0\times V)$$

$$\cap:$$

$$(u,v)\in(U\times 0)\cap(0\times V)\Rightarrow(u,v)\in(U\times 0)\wedge(u,v)\in(0\times V)\Rightarrow$$

$$u\in U\wedge v\in\{0_V\}\wedge u\in\{0_U\}\wedge v\in V\Rightarrow u=0_U, v=0_V$$

ובסה"כ סכום ישר.