

תרגיל 3 אינפי 4

תרגיל 3.1. עבור כל אחת מהתבניות הבאות קבע אם היא מדוייקת בתחום הנתון. במידה וכן, מצא את פונקציית הפוטנציאל של השדה המתאים.

1. $\omega(x, y) = e^{x-y}(1+x+y) dx + e^{x-y}(1-x-y) dy$ בכל \mathbb{R}^2 .

2. $\omega(x, y) = \frac{y^2}{1+x^2+y^2} dx + \frac{y}{1+x^2+y^2} dy$ בכל \mathbb{R}^2 .

3. $\omega(x, y) = -\frac{y^2}{(x-y)^2} dx + \frac{x^2}{(x-y)^2} dy$ ב $\{(x, y) : x > y\}$.

4. $\omega(x, y) = \frac{2y}{(x+y)} dx - \frac{2x}{(x+y)} dy$.

תרגיל 3.2. האם התבנית

$$\omega(x, y) = \frac{(x-y)}{x^2+y^2} dx + \frac{(x+y)}{x^2+y^2} dy$$

מדוייקת על $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? במידה וכן, מצאו את הפוטנציאל של השדה המתאים.

תרגיל 3.3. חשבו את האינטגרלים הבאים.

1. $\int_{\Gamma} \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$ כאשר Γ היא השפה של הריבוע $ABCD$

$$A = (1, 0), B = (0, 1), C = (-1, 0), D = (0, -1)$$

נגד כיוון השעון.

2. $\int_{\Gamma} -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ כאשר $\Gamma = \{(x, y) : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1\}$ נגד כיוון השעון.

3. $\int_{\Gamma} y^3 z^2 dx + (x^2 + y^2 + z^2) dy + z dz$ כאשר

$$\Gamma = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 = 4, x = 0, z < 0\}$$

4. $\int_{\Gamma} x^2 dx + y^2 dy = 1$ כאשר $\Gamma = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ נגד כיוון השעון.

תרגיל 3.4. הוכיחו שאם $\|F(x)\| \leq M$ עבור שדה F, Γ פשוטה, אזי לכל פרמטריזציה γ של Γ מתקיים

$$\left| \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma \right| \leq ML(\Gamma)$$