פתרון מבחן מועד ב – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 07/03/19

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)\arctan(x)}{1-\cos(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos(3x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{1-\cos(x)}}_{\to 2}\cdot 3\cdot\underbrace{\frac{\arctan(x)}{x}}_{\to 1}=6$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=1$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+\ln(x)}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+\ln(x)}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{\ln(x)}{e^x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\{\infty\cdot 1\}=\infty$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}$

$$\lim\sqrt[n]{n^2+1}=\lim\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}}=\lim\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\{1^2\cdot 1^0\}=1$$

2.

א. חשבו את $\int\frac{6x^3+12x+6}{(x^2+x+1)(x-1)}dx$.

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_0^1\frac{e^x}{x^2+\sin\left(\sqrt{x}\right)}dx$.

3.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x + x = \sin(x)$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = e^x + x - \sin(x)$$

$$h'(x) = e^x + 1 - \cos(x) \geq e^x + 0 > 0$$

כלומר $h(x)$ עולה תמיד, ולכן יש לכל היותר פתרון אחד.

נחשב גבולות

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} e^x\left(1 + \frac{x}{e^x} - \frac{\sin(x)}{e^x}\right) = \infty$$

ולכן יש נקודה x_2 בה $h > 0$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x + x - \sin(x) = \{0 - \infty - \text{חסומה}\} = -\infty$$

ולכן יש נקודה x_1 בה $h < 0$

כעת h רציפה כצירוף אלמנטריות רציפות ולכן לפי ערך הביניים היא חותכת את הציר בין x_1, x_2

סה"כ פתרון יחיד למשוואה.

ב. הוכיחו שקיים $a \in \mathbb{R}$ עבורו יש פתרון יחיד למשוואה $e^x + \frac{x^2}{2} + \cos(x) = a$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$g(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + \cos(x) - a$$

$$g'(x) = e^x + x - \sin(x)$$

כלומר הנגזרת של g היא בדיוק h מסעיף קודם.

על h גילינו שהיא עולה תמיד, וחותכת את הציר בנקודה כלשהי שנסמנה c.

בתחום $(-\infty, c]$ מתקיים כי $h < 0$ כלומר $g' < 0$ ולכן g יורדת בתחום זה.

באופן דומה g עולה בתחום $[c, \infty)$.

לכן סה"כ g מקבלת את המינימום שלה בנקודה $x = c$

אם נדאג לכך ש $g(c) = 0$ אז זה יהיה הפתרון היחיד, כי אחריו ולפניו הפונקציה גדולה יותר.

$$g(c) = 0$$

$$e^c + \frac{c^2}{2} + \cos(c) - a = 0$$

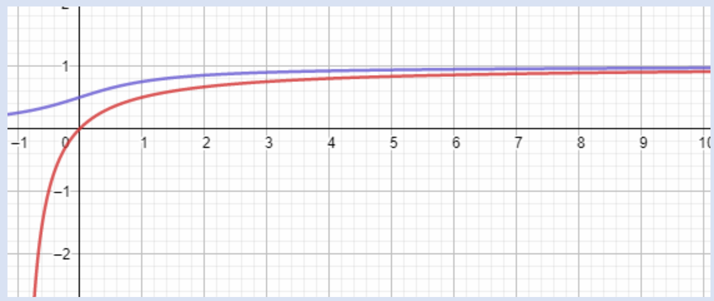
ולכן נבחר

$$a = e^c + \frac{c^2}{2} + \cos(c)$$

4. תהי פונקציה f המקיימת $f(x) > 0$ וגם $f''(x) < 0$ לכל $x > 0$.

א. מצאו דוגמא עבורה $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ או הוכיחו שלא קיימת כזו.

ציור רעיוני:



הפונקציות הן

$$f(x) = \frac{\arctan(x) + \frac{\pi}{2}}{\pi}, \quad g(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$$

קל לוודא שהן מקיימות את כל הנתונים (וכמובן שצריך לעשות זאת בשעת מבחן).

ב. מצאו דוגמא עבורה $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ או הוכיחו שלא קיימת כזו.

נב"ש שיש פונקציה כזו.

כיוון שהנגזרת השנייה שלילית, הנגזרת הראשונה יורדת.

האם ייתכן שהנגזרת הראשונה תמיד גדולה או שווה אפס?

לא, כי אז f עולה, וכיוון שהיא חיובית היא לא תוכל לשאוף לאפס.

לכן קיימת נקודה x_0 בה $f'(x_0) < 0$

כיוון שהנגזרת תמיד יורדת, לכל $x > x_0$ מתקיים כי $f'(x) < f'(x_0)$

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = f(x) - f'(x_0)x$$

כעת, h פונקציה שנגזרתה שלילית (הרי $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$), ולכן היא תמיד יורדת אחרי x_0.

כלומר לכל $x > x_0$ מתקיים כי

$$h(x) < h(x_0)$$

$$f(x) - f'(x_0)x < f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

$$f(x) < f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

כיוון ש $f'(x_0) < 0$ הישר מצד ימין חותך את הציר ושלילי החל משלב מסוים בסתירה לכך שf תמיד חיובית.

(צד ימין הוא בעצם המשיק בנקודה, וכיוון שהפונקציה "בוכה" היא קטנה מהמשיק)

5. תהי סדרה המקיימת $a_{n+1} = a_n^2$.

נפתור את התרגיל באמצעות טריק – נזהה את הנוסחא המפורשת לסדרה.

$$a_1, a_1^2, a_1^4, a_1^8, \ldots$$

נוכיח באינדוקציה כי לכל n

$$a_n = (a_1)^{2^{n-1}}$$

בדיקה: עבור $n = 1$ ברור

יהי n עבורו $a_n = (a_1)^{2^{n-1}}$ אזי

$$a_{n+1} = a_n^2 = \left((a_1)^{2^{n-1}}\right)^2 = (a_1)^{2\cdot 2^{n-1}} = (a_1)^{2^n}$$

א. נניח כי $a_1 = \frac{1}{2}$, מצאו את גבול הסדרה.

לפי עבודת השטח המקדימה

$$a_n = \frac{1}{2^{2^{n-1}}} \to 0$$

ב. נניח כי $a_1 = 2$, מצאו את גבול הסדרה.

באופן דומה

$$a_n = 2^{2^{n-1}} \to \infty$$

.6

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \dfrac{\tan\left(\frac{1}{n}\right) + \tan\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + \tan\left(\frac{n}{n}\right)}{n}$

ב. קרבו את $\sqrt[3]{9}$ עד כדי שגיאה של $\frac{1}{100}$.