סדרת קבוצות $(E_n)_{\mathbb{N}}$

הגדרה:
$$\overline{\lim}\, E_n = \limsup E_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\le k} E_k$$
$$\underline{\lim}\, E_n = \liminf E_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\le k} E_k$$

טענה: הוכחנו.

(1) $\overline{\lim}\, E_n = \{x \mid \{n \mid x\in E_n\}$ אינסופית $\}$

(2) $\underline{\lim}\, E_n = \{x \mid \{n \mid x\notin E_n\}$ סופית $\}$

הוכחה:

(1) $x\in \overline{\lim}\, E_n \iff x\in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\le k} E_k$

$\iff \forall n\in\mathbb{N} : \exists k\ge n : x\in E_k$

$\iff$ אינסופית $\{n \mid x\in E_n\}$

(2) $x\in \underline{\lim}\, E_n \iff x\in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\le k} E_k$

$\iff \exists n\in\mathbb{N} : \forall k\ge n \quad x\in E_k$

$\iff \exists n\in\mathbb{N} : [x\notin E_k \Rightarrow k<n]$

$\iff$ סופית $\{n \mid x\notin E_n\}$

הערה: קל לראות כי מתקיים תמיד:
$$\bigcap_{\mathbb{N}} E_n \subseteq \underline{\lim}\, E_n \subseteq \overline{\lim}\, E_n \subseteq \bigcup_{\mathbb{N}} E_n$$
ולא תמיד $\underline{\lim}\, E_n = \overline{\lim}\, E_n$

לדוגמא: נגדיר $A=\{1,2,3\}$
$B=\{2,3,4\}$
$C=\{3,4,5\}$

ומכאן נגדיר את הסדרה $(E_n)_{\mathbb{N}}$ באופן הבא:
$E_1 = C$
ולכל n: $E_{2n} = A$
$E_{2n+1} = B$

אזי:

$$\bigcap_{N} E_n = A\cap B\cap C = \{3\} \subset \underline{\lim}\, E_n = A\cap B = \{2,3\} \subset \overline{\lim}\, E_n = A\cup B = \{1,2,3,4\} \subset \bigcup_{N} E_n = A\cup B\cup C = \{1,2,3,4,5\}$$

<u>תרגיל:</u> תהי $\{f_n\}_N$ סדרת פונקציות רציפות על הקטע $[0,1]$.
הוכיחו כי הקבוצה

$\{x \mid f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\} \in S$ (כאשר מדידה-לבג ב-$\mathbb{R}$)

<u>הוכחה:</u> לכל $\varepsilon>0$ נגדיר את סדרת הקבוצות הבאה:

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad E_n^\varepsilon := \{x \mid f_n(x) < \varepsilon\}$$

כעת:

$x \in \{x \mid f_n(x) \to 0\}$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N} : \forall k\geq n \quad x\in E_k^\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \quad \{n \mid x\notin E_n^\varepsilon\}$ סופית

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \quad x\in \underline{\lim}\, E_n^\varepsilon$

$\Leftrightarrow x\in \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} E_k^\varepsilon$

כעת, נשים לב כי לכל n ולכל $\varepsilon>0$ הקבוצה E_n^ε פתוחה ב-$\mathbb{R}$, ולכן (לפי השיעור הקודם) ניתנת להצגה כאיחוד מני בר של קטעים פתוחים, ומכאן שהיא מדידה. (כיון ש-S היא σ אלגברה וכל קטע הוא "מדיד" ב-$\mathbb{R}$).
מכאן שגם $\underline{\lim}\, E_n^\varepsilon$ מדידה (שוב: σ אלגברה (S) סגורה לגבי החיתוך והאיחוד <u>מני</u>)

נותר להוכיח כי: $\bigcap_{\varepsilon>0} \underline{\lim}\, E_n^\varepsilon = \bigcap_{t\in\mathbb{N}} \underline{\lim}\, E_n^{1/t}$

{ הכיוון $\subseteq$ טריוויאלי. (חיתוך על <u>יותר</u> קבוצות)
לגבי $\supseteq$: אם $x\in \bigcap_{t\in\mathbb{N}} \underline{\lim}\, E_n^{1/t}$ אזי - יהי $\varepsilon>0$
קיים $t\in\mathbb{N}$ כך ש $1/t<\varepsilon$ ולכן
$x\in \underline{\lim}\, E_n^{1/t} \Rightarrow x\in \underline{\lim}\, E_n^\varepsilon$ (הכלה). וזאת לכל $\varepsilon>0$]

ולכן, שוב ע"י שימוש בכך ש-S סגורה לחיתוכים בני מנייה נסיק כי

$\{x \mid f_n(x) \to 0\}$ מדידה לבג (כלומר: שייכת ל-S).

<u>תזכורת</u>: מלבן $P\subset\mathbb{R}^d$ ממד d אזי <u>מידתו</u> מוגדרת להיות נפחו. (כלומר מכפלת אורכי צלעותיו). $|P| =$ הנפח של P.

יהי $E\subseteq\mathbb{R}^d$ מלבן.

<u>הגדרה</u> - <u>מידה חיצונית</u> של $A\in\mathbb{P}(E)$ מוגדרת

$$m^*(A) := \inf_{A\subseteq\bigcup_{\mathbb{N}} P_i}\sum_i |P_i|$$

כאשר הגבול התחתון נלקח מתוך הכיסויים הסופיים ובני המנייה של A ע"י מלבנים ($\{P_i\}$).

$A\in\mathcal{E}\subseteq\mathbb{P}(E)$ <u>אלמנטרית</u> $\iff$ $A=\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} P_i$

כלומר: A מהווה איחוד <u>זר</u> סופי של מלבנים.

$S\in\mathcal{S}\subseteq\mathbb{P}(E)$ <u>מדידה לבג</u> $\iff$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\, \epsilon\in\mathcal{E}: m^*(S\Delta\epsilon)<\varepsilon$

<u>למה</u>: לכל $A,B\in\mathbb{P}(E)$ מתקיים:

$$|m^*(A)-m^*(B)|\le m^*(A\Delta B)$$

<u>הוכחה</u> - כיון שהביטוי ימין סימטרי ביחס ל-A ו-B ניתן להניח בלי הגבלת הכלליות כי $m^*(A)\ge m^*(B)$

כעת: $A\subseteq B\cup(A\Delta B)$

לכן לפי המונוטוניות של m^*:

$$m^*(A)\le m^*(B\cup(A\Delta B)) \underset{\text{תת אדיטיביות } m^*}{\le} m^*(B)+m^*(A\Delta B)$$

$\Leftarrow$ $m^*(A)-m^*(B)\le m^*(A\Delta B)$ <u>כנדרש</u>.

Scanned by CamScanner

הוכח: אם $m^*(A)=0$

אז $m^*(A\cup B)=m^*(B)$

הוכחה:

$$\underbrace{m^*(B) \le}_{\substack{\text{מונוטוניות } m^* \\ B\subseteq A\cup B}} \underbrace{m^*(A\cup B) \le}_{\text{תת אדיטיביות } m^*} \underbrace{m^*(A)}_{0} + m^*(B) = m^*(B)$$

מ.ש.ל.

תרגיל: תהי A קבוצת האי רציונליים ב $[0,1]$ הוכח כי

$$m^*(A)=1$$

פתרון: טענה (חשובה!): המידה החיצונית של נקודה $=0$.

הסבר: תהי $x\in\mathbb{R}$ אזי לכל $\varepsilon>0$ מתקיים:

$x\in \left(x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}\right) =: P_\varepsilon$ (סימון ב $\mathbb{R}$), והמידה של P_ε היא ε (אורך של קטע)

לכן:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \underbrace{m^*(\{x\}) \le \varepsilon}_{\{x\}\subset P_\varepsilon \,:\, \text{מונוטוניות } m^*}$$

ומכאן, לפי הגד' m^* (כ inf), כאשר $\varepsilon\to 0$ נקבל $m^*(\{x\})=0$. ■

כעת: נסמן ב B את קב' הרציונליים ב $[0,1]$: $B=\mathbb{Q}\cap[0,1]$

$B\subset\mathbb{Q}$ בת מנייה, כלומר: $B=\{x_n\}_{\mathbb{N}}$

וכמו כן: $m^*(B)\le\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{m^*(\{x_n\})}_{0}$.

לכן $m^*(B)=0$

נזכור כי $[0,1]=A\,\dot\cup\, B$

ולפי התרגיל הקודם $m^*(A) \underset{m^*(B)=0}{=} m^*(A\cup B) = m^*([0,1]) \underset{\text{אורך הקטע}}{=} 1$

מ.ש.ל.

תזכורת: ראינו כי הצמצום של $m^*|_S$ אדיטיבית. כלו' אם $A,B,C\in S$, $A=B\,\dot\cup\, C$ אז $m^*(A)=m^*(B)+m^*(C)$

טענה: אם $E,F\in S$, $E\subseteq F$ אזי מתקיימת תכונת החיסור:

$$m^*(F-E)=m^*(F)-m^*(E)$$

⊛ **הערה:** הפרש של קבוצות מתוך S שייך גם הוא ל-S, כי: $E_1^{\in S} - E_2^{\in S} = E_1^{\in S} \cap E_2^{c\,\in S}$
(σ-אלגברה סגורה לגבי המשלים והחיתוך)

הוכחה:

$$F = E \cup (F \setminus E)$$

ולפי האדיטיביות של $m^*|_S$: $m^*(F) = m^*(E) + m^*(F-E)$

כנדרש!

משפט: אם $\{E_n\}_{\mathbb{N}} \subseteq S$ סדרה עולה של קבוצות מדידות:

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$$

אזי

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n \to \infty} m^*(E_n)$$

הוכחה:

$$\forall n: \quad E_n = E_1 \cup (E_2 - E_1) \cup \dots \cup (E_n - E_{n-1})$$

וכל הקבוצות באיחוד הזר שייכות ל-S.

לפי האדיטיביות של $m^*|_S$:

$$\circledast \quad m^*(E_n) = m^*(E_1) + m^*(E_2 - E_1) + \dots + m^*(E_n - E_{n-1})$$

כמו כן:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \cup (E_2 - E_1) \cup (E_3 - E_2) \cup \dots\dots$$

לכן:

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m^*(E_1) + m^*(E_2 - E_1) + \dots\dots$$

[סכום של טור = גבול הסכומים החלקיים]

$$\overset{def}{=} \lim_{n \to \infty}\left(m^*(E_1) + m^*(E_2 - E_1) + \dots + m^*(E_n - E_{n-1})\right)$$

$$\overset{\circledast}{=} \lim_{n \to \infty} m^*(E_n) \quad \blacksquare$$

תרגיל: הוכיחו את אי שוויון ה-Δ עבור המרחק (מטריקה) שהוגדר בהרצאה!

$$A, B \in \mathbb{P}(E): \quad \rho(A,B) := m^*(A \Delta B)$$

פתרון: צריך להוכיח:

$$\rho(A,B) \leq \rho(A,C) + \rho(C,B)$$

נחשב:

$$\rho(A,C) + \rho(C,B) = m^*(A\Delta C) + m^*(C \Delta B)$$

(תת אדיטיביות m^*) $\geq m^*((A\Delta C) \cup (C \Delta B))$

$$= m^*((A-C) \cup (C-A) \cup (C-B) \cup (B-C))$$

$$= m^*[((A \cup B) - C) \cup (C - (A \cap B))]$$

$((A\cap B) \subseteq (A \cup B))$ $= m^*((A \cup B \cup C) - (A \cap B))$

$$\geq m^*((A \cup B) - (A \cap B)) = \rho(A \Delta B)$$

מונוטוניות m^*