תרגיל 7

1) א) תהי $\phi(x)$ פו' המקיימת $\phi(x)=\phi(x+1)$ לכל $x\in\mathbb{R}$

ומקיימת:

$$\int_0^1 \phi(x)\,dm < \infty$$

נגדיר:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(nx)}{n^2}$$

הראו ש-f סופית כמ"ע.

ב) הסיקו שהטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{|\sin(n\pi x)|}}$

מתכנס כמ"ע..

2) הוכיחו שפונקצית קנטור איננה רציפה בהחלט.

3) תהי: $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ מדידה לבג

כך ש:

$$m(\{x \mid f(x)\neq 0\}) < \infty$$

נגדיר:

$$\forall k\in\mathbb{N}: \quad A_k := \{x \mid k \leq f(x) < k+1\}$$

הראו כי: $\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot m(A_k) < \infty \iff \int_{\mathbb{R}^n} f < \infty$

4) (Ω,S,μ) σ-סופי

תהי $f\in J(\Omega)$ פונקציה אי שלילית, המקיימת: $\int f = \infty$

הראו שלכל $M>0$ קיימת פו' g מדידה כך ש:

$0 \leq g \leq f$, וכן מקיימת:

(1) $\int g \geq M$ (2) g חסומה (3) $m(\{g\neq 0\}) < \infty$