

## פתרון תרגיל 6 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו

13 באפריל 2016

1. נשים לב שמתקיים (לכל פרמטריזציה  $r$ ):

$$G = \begin{pmatrix} r_u \cdot r_u & r_u \cdot r_v \\ r_u \cdot r_v & r_v \cdot r_v \end{pmatrix} = J_r^t \cdot J_r$$

כאשר  $J$  היא היעקוביאן של  $r$ . אם כן, לפי כלל השרשרת:

$$J_{\bar{r}} = J_r(f) \cdot J_f$$

ולכן:

$$\tilde{G} = J_{\bar{r}}^t \cdot J_{\bar{r}} = (J_r(f) \cdot J_f)^t \cdot J_r(f) \cdot J_f = J_f^t \cdot J_r(f)^t \cdot J_r(f) \cdot J_f = J_f^t G J_f$$

ובסה"כ:

$$\tilde{G}(x, y) = J_f^t(x, y) G(f(x, y)) J_f(x, y)$$

2. תהי  $p \in S^2 \setminus \{N\}$  נקודה על הספירה שאינה הקוטב הצפוני.  
הישר  $Np$  מוגדר על ידי:

$$Np = \{(1-t)N + pt : t \geq 0\}$$

אם נסמן  $p = (x, y, z)$  ונזכור ש:  $N = (0, 0, 1)$ , נקבל:

$$Np = \{(tx, ty, 1-t+tz) | t \geq 0\}$$

נקודת החיתוך עם המישור  $xy$  מקיימת:  $1-t+tz = 0$ , כלומר:  $t = \frac{1}{1-z}$ .  
לכן, הנקודה היא:  $\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right)$ , ולכן ההטלה הסטריאוגרפית מוגדרת כך:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right)$$

3. נחשב את המטריקה  $G$ . וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u = (0, 0, 1), r_s = \left( (\gamma^1(s))', (\gamma^2(s))', 0 \right)$$

ולכן:

$$g_{22} = r_u \cdot r_u = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = r_u \cdot r_s = 0$$

$$g_{11} = r_s \cdot r_s = \|\gamma'(s)\|^2$$

ולכן אם נבחר פרמטריזציה טבעית (שבה  $\|\gamma'(s)\| = 1$ ) נקבל שאכן:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

4. נשתמש במטריקה  $G$ .

(א) וקטור הנגזרות הוא:  $\gamma'(t) = (2, 0)$  ולכן האורך הוא:

$$L(\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|(2, 0)\| dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

(ב) וקטורי הנגזרות הם:

$$f_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), f_\phi = (-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0)$$

לאחר חישוב מקבלים:

$$G = \begin{pmatrix} \langle f_\theta, f_\theta \rangle & \langle f_\theta, f_\phi \rangle \\ \langle f_\phi, f_\theta \rangle & \langle f_\phi, f_\phi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן, האורך הוא:

$$\begin{aligned} L(f \circ \gamma) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin^2 2t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 \sin^2 2t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin 2t dt = \\ &= -\cos 2t \Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 2 \end{aligned}$$

(ג) וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), r_v = (-(2 + \cos u) \sin v, (2 + \cos u) \cos v, 0)$$

ולכן:

$$g_{11} = r_u \cdot r_u = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = r_u \cdot r_v = 0$$

$$g_{22} = r_v \cdot r_v = (2 + \cos u)^2$$

$$.G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2 + \cos u)^2 \end{pmatrix} \text{ כלומר}$$

כעת, נחשב את השטח באמצעות הנוסחה:

$$\iint_{r(D)} dS = \iint_D \sqrt{\det G} dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos u) du dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2u + \sin u) \Big|_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} dv =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi + 1) dv = \frac{\pi}{2} (\pi + 1)$$

$$\iint_{r(E)} dS = \iint_E \sqrt{\det G} dS = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos u) du dv = \pi (\pi + 1)$$

הטורוס נראה כך:

