

# תורת המספרים האלגברית (88798)

## תרגיל 1

1. יהיו  $A \subseteq B \subseteq C$  חוגים. הוכח שאם  $B$  שלם מעל  $A$  ואם  $C$  שלם מעל  $B$ , אזי  $C$  שלם מעל  $A$ .

2. יהיו  $A \subseteq B$  תחומי שלמות ויהי  $C$  הסגור השלם של  $A$  ב- $B$ . הוכח כי  $C$  סגור בשלמות.

3. כאן ובשלוש השאלות הבאות,  $A$  הינו תחום שלמות סגור בשלמות,  $K = \text{Frac } A$  שדה השברים,  $L/K$  הרחבה סופית,  $B$  הסגור השלם של  $A$  ב- $L$ . יהי  $\alpha \in L$ , ויהי  $f_\alpha(x) \in K[x]$  הפולינום המינימלי של  $\alpha$ . הוכח כי  $\alpha \in B$  אם ורק אם  $f_\alpha(x) \in A[x]$ .

4. תהי  $M/L$  הרחבה סופית, ויהי  $\alpha \in M$ . הוכח כי

$$\begin{aligned} N_{M/K}(\alpha) &= N_{L/K}(N_{M/L}(\alpha)) \\ \text{Tr}_{M/K}(\alpha) &= \text{Tr}_{L/K}(N_{M/L}(\alpha)). \end{aligned}$$

5. תהי  $L/K$  הרחבה פרידה, ויהי  $\alpha \in L$ . כמו בשיעור, נקבע סגור אלגברי  $\bar{K} \subset \bar{L}$ , ויהי  $\Sigma$  האוסף של כל השיכונים  $\sigma : L \rightarrow \bar{K}$  המקיימים  $\sigma(\beta) = \beta$  לכל  $\beta \in K$ . הוכח כי:

$$N_{L/K}(\alpha) = \prod_{\sigma \in \Sigma} \sigma(\alpha). \quad (\text{א})$$

$$\text{Tr}_{L/K}(\alpha) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma(\alpha). \quad (\text{ב})$$

(ג) יהי  $g_\alpha(x)$  הפולינום האופייני של  $\alpha$ , כלומר הפולינום האופייני של ההעתקה ה- $K$  לינארית  $\mu_\alpha : L \rightarrow L$  המוגדרת על ידי  $\mu_\alpha(\beta) = \alpha\beta$ . אזי  $g_\alpha(x) = \prod_{\sigma \in \Sigma} (x - \sigma(\alpha))$ .

(ד) יהי  $\beta \in B$ . אזי  $\beta$  הפיך אם ורק אם  $N_{L/K}(\beta)$  הינו איבר הפיך של  $A$ .

6. יהי  $B \subset M \subset L$  ונניח כי  $M$  נוצר סופית כ- $B$ -מודול. כיוון ש- $A \subset M$  יש מבנה טבעי של  $A$ -מודול על  $M$ . הוכח כי  $M$  הינו  $A$ -מודול חפשי מדרגה  $[L : K]$ .

7. יהי  $D \in \mathbb{Z}$ , נניח כי  $D \notin \{0, 1\}$ , וכי  $D$  חפשי מריבועים, כלומר אינו מתחלק ב- $n^2$  לשום  $n > 1$ . יהי  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ . מצא את חוג השלמים  $\mathcal{O}_K$  ואת הדיסקרימיננטה  $d_K$ .

8. הוכח כי  $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$  הינו בסיס שלם של  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ .

9. הוכח שהחוג  $\mathbb{Q}[x, y]/(x^3 - y^2)$  הינו תחום שלמות אך אינו סגור בשלמות.

10. הוכח, בשיטות של תורת המספרים היסודית, את המשפט של רבי לוי בן גרשום: אם  $x, y > 1$  הינם שלמים שמקיימים  $x^3 - y^2 = \pm 1$ , אזי  $(x, y) = (2, 3)$ .