ההוכחה מתרגול 4

בתרגול טענו ש-$R = \mathbb{C}[x,y]/\langle xy-1\rangle \cong \mathbb{C}\left[t,t^{-1}\right]$. נכתוב הוכחה מלאה לטענה הזו.

נגדיר הומומורפיזם $\varphi : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}\left[t,t^{-1}\right]$ לפי $\varphi(x) = t$ ו-$\varphi(y) = t^{-1}$. זה מגדיר את φ על כל $\mathbb{C}[x,y]$: $\varphi(f(x,y)) = f\left(t,t^{-1}\right)$.

טענה. φ על.

הוכחה. כל איבר של $\mathbb{C}\left[t,t^{-1}\right]$ הוא פולינום ב-t,t^{-1}. נכתוב אותו $\sum_{i=-n}^{n} a_i t^i$ (יש פה חזקות חיוביות וגם שליליות). נתבונן בפולינום $f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=-n}^{-1} a_i y^i$; אזי מתקיים $\varphi(f(x,y)) = \sum_{i=-n}^{n} a_i t^i$, ולכן φ על. $\square$

טענה. $\ker\varphi \supseteq \langle xy-1\rangle$.

הוכחה. בעצם, מספיק להראות $\varphi(xy-1) = 0$. למה? נזכור ש-$\langle xy-1\rangle$ הוא האידאל הנוצר על ידי $xy-1$, כלומר זהו האידאל המינימלי של $\mathbb{C}[x,y]$ המכיל את $xy-1$. כיוון ש-$\ker\varphi$ אידאל, אם $f \in \ker\varphi$ אז גם $\langle f\rangle \in \ker\varphi$. ואכן מחישוב ישיר נקבל כי $\varphi(xy-1) = tt^{-1} - 1 = 1 - 1 = 0$. $\square$

טענה. $\ker\varphi = \langle xy-1\rangle$.

הוכחה. נתחיל מדוגמה כדי שתמחיש את רעיון ההוכחה. שימו לב ש-$f(x,y) = x^2y^3 + x^2y + xy^2 - x - 2y \in \ker\varphi$. למה?

$$\varphi(f(x,y)) = t^2t^{-3} + t^2t^{-1} + tt^{-2} - t - 2t^{-1} = t^{-1} + t + t^{-1} - t - 2t^{-1} = 0.$$

בעצם, היו פה שני חלקים בתוך הפולינום, כל אחד מהם הצטמצם מעצמו: $x^2y^3 + xy^2 - 2y$ ו-$x^2y - x$. מה משותף לכל אחד מן החלקים האלו? אם נוציא מהם חזקות מתאימות של x או של y, נקבל פולינום ב-xy. בנוסף, כל אחד מהחלקים האלו מתחלק בפני עצמו ב-$xy-1$.

נבצע בדיוק את אותו הרעיון במקרה הכללי. ניקח $f(x,y) \in \ker\varphi$, ונכתוב

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} x^k p_k(xy) + \sum_{k=1}^{m} y^k q_k(xy)$$

(איך הפירוק הזה נראה במציאות? לכל מונום x^iy^j רואים מי מבין המשתנים בחזקה הגבוהה יותר, ומוציאים אותה החוצה). כל אחד מהפולינומים p_k, q_k הוא פולינום במשתנה יחיד מעל $\mathbb{C}$. לפי ההגדרה,

$$\varphi(f(x,y)) = \sum_{k=0}^{n} t^k p_k(1) + \sum_{k=1}^{m} t^{-k} q_k(1) = 0,$$

ולכן $p_k(1) = q_k(1) = 0$ לכל k. אבל $p_k(t), q_k(t)$ הם הפולינומים במשתנה יחיד ש-1 הוא שורש שלהם, ולכן ניתן לבצע חילוק פולינומים ולכתוב

$$p_k(t) = (t-1)\,g_k(t), \qquad q_k(t) = (t-1)\,h_k(t)$$

לכל k, ואם נציב בחזרה בפולינום המקורי נקבל

$$f\left(x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}x^{k}g_{k}\left(xy\right)\left(xy-1\right)+\sum_{k=1}^{m}y^{k}h_{k}\left(xy\right)\left(xy-1\right)\in\left\langle xy-1\right\rangle$$

כנדרש. $\square$

הראינו ש-$\varphi:\mathbb{C}\left[x,y\right]\to\mathbb{C}\left[t,t^{-1}\right]$ אפימורפיזם עם $\ker\varphi=\left\langle xy-1\right\rangle$, ולכן ממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל $R\cong\mathbb{C}\left[t,t^{-1}\right]$.