פתרון תרגיל 4

1. חשבו את השטח של המשטח S במקרים הבאים

א. $S=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=16,\sqrt{x^2+y^2}\le z\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y,z):3x-3y+z=12,y^2+z^2\le 1\right\}$

ג. המשטח S המתקבל מסיבוב הגרף של $x\in[0,1],y=x^3$ ב־$\mathbb{R}^3$ סביב ציר ה־OX.

פתרון: א. כיוון שהמשטח נמצא על הספירה $x^2+y^2+z^2=16$ נבצע את הפרמטריזציה הבאה

$$\phi(\theta,\psi)=\left(4\cos\theta\sin\psi,4\sin\theta\sin\psi,4\cos\psi\right).$$

כדי לקבוע את תחום הפרמטרים θ ו־ψ נשתמש בכך ש־$x^2+y^2\le z^2$ ונקבל

$$16\cos^2\theta\sin^2\psi+16\sin^2\theta\sin^2\psi\le 16\cos^2\psi$$

$$\Rightarrow \sin^2\psi\le\cos^2\psi\Rightarrow\sin^2\psi\le\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}\le\sin\psi\le\frac{1}{\sqrt{2}},$$

לכן $\psi\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$. אבל כיוון ש־$z\ge 0$, כלומר $\cos\psi\ge 0$ נקבל ש־ψ שייכת רק לקטע $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$. לכן תחום ההגדרה של הפרמטריזציה ϕ הוא $(\theta,\psi)\in(-\pi,\pi)\times\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$. כעת נחשב את D_ϕ:

$$D_\phi(\theta,\psi)=\begin{pmatrix}-4\sin\theta\sin\psi & 4\cos\theta\cos\psi\\ 4\cos\theta\sin\psi & 4\sin\theta\cos\psi\\ 0 & -4\sin\psi\end{pmatrix},$$

לכן

$$D_\phi(\theta,\psi)^TD_\phi(\theta,\psi)=\begin{pmatrix}16\sin^2\psi & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}.$$

מכאן נקבל ש־

$$\left(\det D_\phi(\theta,\psi)^TD_\phi(\theta,\psi)\right)^{\frac{1}{2}}=16|\sin\psi|.$$

לכן מהנוסחא לחישוב שטח של משטח נקבל בסוף שהשטח של S הוא:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\pi}^{\pi}16|\sin\psi|d\theta d\psi = 32\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|\sin\psi|d\psi = 64\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin\psi d\psi$$

$$= 64\pi\left(-\cos\psi\right)\Big|_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{4}} = 64\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

ב. קודם נחלץ את z מהמשוואה $3x-3y+z=12$ ונקבל ש־$z=12-3x+3y$. כמו כן, כיוון שהמשטח S נמצא בתוך הגליל $y^2+z^2\le 1$ נקבל ש־$y^2+(12-3x+3y)^2\le 1$. לכן נקבל את הפרמטריזציה

$$\phi(x,y)=(x,y,12-3x+3y)$$

בתחום $y^2+(12-3x+3y)^2\le 1$. כעת נחשב את D_ϕ

$$D_\phi(x,y)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix},$$

לכן נקבל ש־

$$D_\phi(x,y)^T D_\phi(x,y)=\begin{pmatrix}10 & -9\\ -9 & 10\end{pmatrix}.$$

מכאן נקבל ש־

$$\left(\det D_\phi(x,y)^T D_\phi(x,y)\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{19}$$

ולכן מהנוסחא לחישוב שטח של משטח נקבל שהשטח של S הוא

$$\int_{y^2+(12-3x+3y)^2\le 1}\sqrt{19}dxdy$$

כדי לחשב את האינטגרל האחרון נבצע את החלפת המשתנים

$$u=y, v=12-3x+3y$$

ונקבל

$$dudv=\frac{dudv}{dxdy}dxdy=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}dxdy=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & 3\end{vmatrix}dxdy=3dxdy.$$

לכן $dxdy=\frac{1}{3}dudv$ ומכאן נקבל שהשטח של S הוא

$$\sqrt{19}\int_{y^2+(12-3x+3y)^2\le 1}dxdy=\frac{\sqrt{19}}{3}\int_{u^2+v^2\le 1}dudv=\frac{\sqrt{19}\pi}{3}$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בכך ששטח של עיגול עם רדיוס 1 הוא π.

ג. עלינו לסובב את העקומה $\gamma(t) = \left(t, t^3, 0\right), t \in [0,1]$ ב־$\mathbb{R}^3$ סביב ציר ה־X. לכן עלינו להכפיל את העקומה γ במטריצה סיבוב המסובבת את מערכת הצירים סביב ציר ה־X בזווית θ כאשר θ היא זווית קבועה כלשהי בתחום $(-\pi, \pi)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^3\cos\theta \\ t^3\sin\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

לכן אם $t \in (0,1)$ ו־$\theta \in (-\pi, \pi)$ אז נקבל פרמטריזציה למשטח S (עד כדי קבוצה ממימד 1). כעת אם נסמן ב־ϕ את הפרמטריזציה הנתונה לפי (1) אז נקבל ש־

$$D_\phi(t,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3t^2\cos\theta & -t^3\sin\theta \\ 3t^2\sin\theta & t^3\cos\theta \end{pmatrix},$$

ולכן

$$D(t,\theta)^T D(t,\theta) = \begin{pmatrix} 1+9t^4 & 0 \\ 0 & t^6 \end{pmatrix}.$$

מכאן נקבל ש־

$$\left(\det D(t,\theta)^T D(t,\theta)\right)^{\frac{1}{2}} = t^3\sqrt{1+9t^4}$$

ולכן מהנוסחא לחישוב שטח של משטח נקבל שהשטח של S הוא

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} t^3\sqrt{1+9t^4}\,d\theta dt = 2\pi \int_0^1 t^3\sqrt{1+9t^4}dt$$

$$= \frac{\pi}{27}\left(1+9t^4\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

2. חשבו את האינטגרל המשטחי $\int_S f dS$ במקרים הבאים:

א. $S = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+\frac{z^2}{3} = 1, \sqrt{x^2+y^2} \le z\right\},\ f(x,y,z) = z$

ב. $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_4=x_1^2+x_2^2+x_3^2,x_3=x_2,0\le x_4\le 1\},$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sqrt{1+4x_4}$$

פתרון: א. למשטח S יש את הפרמטריזציה:

$$\phi(\theta,\psi)=\left(\cos\theta\sin\psi,\sin\theta\sin\psi,\sqrt{3}\cos\psi\right).$$

כדי למצוא את תחום הפרמטרים θ ו־ψ נשתמש בכך ש־$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ ולכן בפרט נקבל ש־$z\ge 0$ ששקול לכך ש־$\psi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. כמו כן

$$x^2+y^2\le z^2\Rightarrow\cos^2\theta\sin^2\psi+\sin^2\theta\sin^2\psi\le 3\cos^2\psi$$

$$\Rightarrow\sin^2\psi\le 3\cos^2\psi\Rightarrow\sin^2\psi\le\frac{3}{4}\Rightarrow 0\le\sin\psi\le\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

לכן $\psi\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ וכיוון שאין תנאי על θ נקבל ש־$\theta\in(-\pi,\pi)$. כעת נחשב את הנגזרת של ϕ:

$$D_\phi(\theta,\psi)=\begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi\\ \cos\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi\\ 0 & -\sqrt{3}\sin\psi\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל ש־

$$D_\phi(\theta,\psi)^TD_\phi(\theta,\psi)=\begin{pmatrix}\sin^2\psi & 0\\ 0 & \cos^2\psi+3\sin^2\psi\end{pmatrix}.$$

מכאן נקבל ש־

$$\left(\det D_\phi(\theta,\psi)^TD_\phi(\theta,\psi)\right)^{\frac{1}{2}}=\sin\psi\left(\cos^2\psi+3\sin^2\psi\right)^{\frac{1}{2}}=\sin\psi\left(1+2\sin^2\psi\right)^{\frac{1}{2}}$$

ומהנוסחא לחישוב אינטגרל משטחי נקבל

$$\int_S f\,dS=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\cos\theta\sin\psi,\sin\theta\sin\psi,\sqrt{3}\cos\psi\right)\sin\psi\left(1+2\sin^2\psi\right)^{\frac{1}{2}}d\theta d\psi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{3}\cos\psi\sin\psi\left(1+2\sin^2\psi\right)^{\frac{1}{2}}d\theta d\psi$$

$$= 2\sqrt{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\psi \sin\psi \left(1 + 2\sin^2\psi\right)^{\frac{1}{2}} d\psi = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(1 + 2\sin^2\psi\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

ב. נציב את המשוואה $x_3 = x_2$ במשוואה הריבועית בהגדרת המשטח S:

$$x_4 = x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_2^2.$$

לכן אם נסמן

$$x_1 = r\cos\theta, x_2 = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta$$

נקבל ש־$x_3 = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta$ ו־$x_4 = r^2$. כמו כן, כיוון ש־$0 \le x_4 \le 1$ נקבל שגם $0 \le r \le 1$. מכאן נקבל את הפרמטריזציה

$$\phi(\theta, r) = \left(r\cos\theta, \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta, \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta, r^2\right), (\theta, r) \in (-\pi, \pi) \times (0, 1)$$

ולכן

$$D_\phi(\theta, r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{r}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{r}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ 2r & 0 \end{pmatrix}.$$

מכאן נקבל ש־

$$D_\phi(\theta, r)^T D_\phi(\theta, r) = \begin{pmatrix} 1 + 4r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

לכן

$$\left(\det D_\phi(\theta, r)^T D_\phi(\theta, r)\right)^{\frac{1}{2}} = r(1 + 4r^2)^{\frac{1}{2}}$$

ומהנוסחא לחישוב אינטגרל משטחי נקבל

$$\int_S f dS = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} f\left(r\cos\theta, \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta, \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta, r^2\right) r(1 + 4r^2)^{\frac{1}{2}} d\theta dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 (1 + 4r^2)^{\frac{1}{2}} r(1 + 4r^2)^{\frac{1}{2}} dr = 2\pi \int_0^1 r(1 + 4r^2) dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} + r^4\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} = 3\pi.$$

3. חשבו את אינטגרל הזרם $\int_S \langle F, N\rangle \, dS$ כאשר

א. $S = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1, 0 \le z \le 1\right\}, F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$
ו־N הוא הנורמל החיצוני ל־S.

ב. $S = \left\{(x,y,z) : z = 1 - 2x^2 - 5y^2 - 2xy, z \ge 0\right\}, F(x,y,z) = (1,1,1)$
ו־N הוא הנורמל החיצוני ל־S.

ג. המשטח S הוא החלק של המשטח $z = 1 - x^2$ הנמצא בין המישורים $y = 0$ ו־$z = y$ ומקיים $z \ge 0$, $F(x,y,z) = (x, 0, 1)$ ו־N הוא נורמל חיצוני.

<u>פתרון</u>: למשטח S יש את הפרמטריזציה (עד כדי קבוצה מימד 1):

$$\phi(\theta, t) = (\cos\theta, \sin\theta, t), (\theta, t) \in (-\pi, \pi) \times (0, 1).$$

נחשב את הנורמל של S לפי הנוסחא

$$n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial\theta} & \frac{\partial\phi_2}{\partial\theta} & \frac{\partial\phi_3}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial t} & \frac{\partial\phi_2}{\partial t} & \frac{\partial\phi_3}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta, \sin\theta, 0). \tag{2}$$

קל לבדוק ש־n המוגדר ככה אכן "פונה החוצה" מהגליל S ולכן הוא נורמל חיצוני, כמו כן מהנוסחא לחישוב אינטגרל זרם שלמדנו בשיעור נובע שאם n מוגדר לפי נוסחא (2) אז

$$\int_S \langle F, N\rangle \, dS = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \langle F \circ \phi, n \circ \phi\rangle \, d\theta dt$$

$$= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \langle (t\sin\theta, t\cos\theta, \cos\theta\sin\theta), (\cos\theta, \sin\theta, 0)\rangle \, d\theta dt$$

$$= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} 2t\cos\theta\sin\theta d\theta dt = 0$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בכך שהאינטגרל מחושב בקטע הסימטרי $(-\pi, \pi)$ והפונקציה $\cos\theta\sin\theta$ היא אי־זוגית.

ב. כיוון ש־$z \geq 0$ ו־$z = 1 - 2x^2 - 5y^2 - 2xy$ נקבל ש־$2x^2 + 5y^2 + 2xy \leq 1$.
לכן נקבל פרמטריזציה למשטח S לפי

$$\phi(x, y) = (x, y, 1 - 2x^2 - 5y^2 - 2xy), 2x^2 + 5y^2 + 2xy \leq 1$$

כעת נחשב את הנורמל n לפי פרמטריזציה זו

$$n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -4x - 2y \\ 0 & 1 & -10y - 2x \end{vmatrix} = (4x + 2y, 10y + 2x, 1).$$

הנורמל n הוא אכן וקטור נורמל חיצוני ל־S כי כאשר $x = y = 0$ נקבל ש־$n = (0, 0, 1)$ ולכן כאשר $x = y = 0$ ו־$z = 1$ הנורמל n אכן "מסתכל למעלה".
בדיוק כמו שעשינו בסעיף א' נקבל ש־

$$\int_S \langle F, N \rangle \, dS = \int_{2x^2 + 5y^2 + 2xy \leq 1} \langle F \circ \phi, n \circ \phi \rangle \, dxdy$$

$$= \int_{2x^2 + 5y^2 + 2xy \leq 1} \langle (1, 1, 1), (4x + 2y, 10y + 2x, 1) \rangle \, dxdy$$

$$= \int_{2x^2 + 5y^2 + 2xy \leq 1} (6x + 12y + 1) dxdy.$$

כעת אם נבצע את החלפת המשתנים $u = x + 2y, v = x - y$ נקבל ש־

$$u^2 + v^2 = (x + 2y)^2 + (x - y)^2 = 2x^2 + 5y^2 + 2xy \leq 1$$

ו־

$$dudv = \frac{dudv}{dxdy} dxdy = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dxdy = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} dxdy$$

$$= |1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1| dxdy = 3dxdy.$$

לכן קיבלנו ש־$dxdy = \frac{1}{3} dudv$ וכמו כן $x = \frac{1}{3}(u + 2v), y = \frac{1}{3}(u - v)$. מכאן נקבל ש־

$$\int_S \langle F, N \rangle \, dS = \frac{1}{3} \int_{u^2 + v^2 \leq 1} (2(u + 2v) + 4(u - v) + 1) \, dudv$$

$$= \frac{1}{3} \int_{u^2 + v^2 \leq 1} (6u + 1) dudv = \frac{\pi}{3}$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בכך שהפונקציה u היא אי זוגית ביחס לציר ה־V והעיגול $u^2+v^2 \leq 1$ סימטרי ביחס לציר זה, לכן האינטגרל על פונקציה זו הוא אפס. כמו כן השתמשנו בכך שלעיגול עם רדיוס 1 יש שטח π.

ג. כיוון ש־$z=1-x^2$ נוכל להגדיר את הפרמטריזציה ל־S לפי

$$\phi(x,y,z)=(x,y,1-x^2).$$

כעת עלינו לקבוע את תחום המשתנים x ו־y. כיוון ש־$z=1-x^2$ ו־$z \geq 0$ נקבל ש־$-1 \leq x \leq 1$. כמו כן, כיוון שכל נקודה (x,y,z) על S מקיימת $z \geq y$ (כי היא נמצאת מעל המישור $z=y$) נובע ש־$y \leq 1-x^2$ וגם $y \geq 0$ (כי המשטח S נמצא מימין למישור $y=0$). כעת נחשב את הנורמל n:

$$n=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\phi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\phi_3}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(2x,0,1).$$

קל לבדוק ש־n הוא נורמל חיצוני כי כאשר $x=y=0$ אז $n=(0,0,1)$, כלומר הוא מסתכל "למעלה". לכן נקבל ש־

$$\int_S f dS=\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\langle(2x,0,1),(x,0,1)\rangle\, dydx$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}(2x^2+1)dydx=\int_{-1}^{1}(2x^2+1)\; y\Big|_{y=0}^{y=1-x^2}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(1-x^2)(2x^2+1)dx=\int_{-1}^{1}(x^2+1-2x^4)dx$$

$$=2\int_0^1(x^2+1-2x^4)dx=2\left(\frac{x^3}{3}+x-\frac{2x^5}{5}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{28}{15}.$$