קומבינטוריקה תרגול 10

27 בדצמבר 2020

1 קטלן

מספרי קטלן מוגדרים להיות:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

ערכים ראשונים:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots$$

תרגילים:

1. בכמה דרכים ניתן להכניס למחסנית ולהוציא ממנה n איברים, כאשר אין חשיבות לאיברים השונים?
פתרון: התשובה היא C_n. נוכיח באמצעות התאמה לסדרות סוגריים מאוזנות. נתאים הכנסה ל"פותח" והוצאה ל"סוגר". התמונה היא סדרת סוגריים מאוזנת כי כיון שלא ניתן להוציא איבר שלא הוכנס, לכן בכל שלב מספר ההכנסות גדול או שווה מספר ההוצאות, ולכן מספר הפותחים גדול או שווה מספר הסוגרים. התאמה זו היא הפיכה לפי ההופכית המאימה לכל פותח הכנסה ולסוגר הוצאה.

2. אילן יוחסין מושרש שלפנינו מתחיל בשורש, ולכל אדם יכולים להיות: 0,1,2 בנים, שמוגדרים לפי ימני ושמאלי. כמה אילנות יוחסין מושרשים יש עם n אנשים?
פתרון: נראה שזה מתאים לנוסחה הרקורסיבית של קטלן:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

באינדוקציה שלימה: בסיס תראו בעצמכם. נניח נכונות לכל $0 \leq k \leq n$. ונתבונן ב־$n+1$. בהינתן אילן יוחסין מושרש עם $n+1$ אנשים. כמה אנשים יכולים להיות בתת

האילן השמאלי? כל $0 \le k \le n$. לכל k כזה, מהנחת האינדוקציה יש C_k אפשרויות לתת העץ השמאלי. בנוסף, בתת העץ הימני יש

$$\underbrace{n+1}_{FullTree} - \underbrace{k}_{Left} - \underbrace{1}_{Root} = n-k$$

אנשים (הורדנו מ־$n+1$ את k הנמצאים בשמאלי ואת השורש), ולכן מהנחת האינדוקציה יש C_{n-k} אפשרויות לתת העץ הימני. ביחד לכל $0 \le k \le n$ יש

$$C_k C_{n-k}$$

אפשרויות. וצריך לסכום על כל ה־k־ים ולכן נקבל

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

וזה מספר קטלן (עם הבסיסים הנכונים).

2 רקורסיה

תרגילים:

1. מעבירים n ישרים במישור, כך שכל שני ישרים נחתכים בנק' אחת, ואין שלושה ישרים שנחתכים באותה נק'. לכמה תחומים הם מחלקים את המישור?
פתרון: ננסה לחשוב על זה באופן רקורסיבי. מציור הבנו שהישר החדש מוסיף תחום אחד יותר מנקודות החיתוך שהוא חותך את הישרים הישנים. בעצם הטענה היא: נסמן את התושבה ב־f_n אזי:

$$f_0 = 1, f_1 = 2, f_2 = 4$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_{n+1} = f_n + (n+1)$$

הוכחה: הישר החדש מחלק כל תחום שהוא עובר בו לשני תחומים, ולכן מוסיף תחום עבור כל תחום שעובר בו. בכמה תחומים הוא עובר? עד נק' החיתוך הראשונה יש תחום אחד, ממנה ועד לשנייה יש עד אחד, וכך עד עד נק' החיתוך האחרונה, וכן תחום נוסף מהאחרונה ועד אינסוף. במילים אחרות: יש תחום עד הראשונה, בין כל 2 נק' חיתוך, ואחרי האחרונה. כיון שיש n נקודות חיתוך (כי הרי יש n ישרים ישנים שאיתם הוא נחתך בדיוק פעם אחת חדשה עם כל אחד), לכן נקבל שנוספים עוד $n+1$ תחומים. ולכן מספר התחומים הוא $f_n + (n+1)$.
לא הספקנו לדון: מה הפתרון של זה? האם אנחנו יכולים למצוא פתרון? אולי כדאי לנחש ולהוכיח את הניחוש? כלומר, האם ניתן למצוא נוסחא מפורשת (לא רקורסיבית) למספר התחומים. שימו לב שקיבלנו נוסחא לא הומוגנית.