תרגול כיתה 7 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה
התפלגויות רציפות מיוחדות, תוחלת ושונות, פונקציה יוצרת מומנטים

מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

נוסחאות

1). התפלגות אחידה רציפה $X \sim U(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

פונקצית הצפיפות:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha} & \alpha \le x \le \beta \\ 0 & else\end{cases}$$

התוחלת והשונות: $V(X)=\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{12}$ $\quad E(X)=\dfrac{\beta+\alpha}{2}$

2). התפלגות מעריכית $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda>0$.

פונקצית הצפיפות: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0\end{cases}$

התוחלת והשונות: $V(X)=1/\lambda^2$ $\quad E(X)=1/\lambda$

הערה: בהתפלגות זו (בדומה להתפלגות הגיאומטרית) קיימת תכונת "חוסר הזכרון":
$P(X=s+t \mid X=t)=P(X=s)$, לכל $s,t\ge 0$.

3). התפלגות גמה $X \sim Gamma(\lambda,\alpha)$, $\lambda,\alpha>0$.

פונקצית הצפיפות: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} & x\ge 0 \\ 0 & x<0\end{cases}$

התוחלת והשונות: $V(X)=\alpha/\lambda^2$ $\quad E(X)=\alpha/\lambda$

חישוב פונקציית גמה: כאשר α טבעי $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$,

אחרת $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.

<u>תרגיל 1</u>

אדם מגיע לתחנת אוטובוס בשעה 10:00. ידוע כי האוטובוס יגיע ברגע כלשהו בין 10:00 ל-10:30.

1. מהי ההסתברות שיצטרך להמתין למעלה מ-10דקות?
2. אם עד 10:15 לא הגיע האוטובוס, מה הסיכוי שיצטרך עדיין להמתין עוד 10 דקות?

פתרון:

ההתפלגות היא אחידה. נסמן ב- X את הזמן בו יגיע האוטובוס (בדקות) מרגע שהאדם

הגיע לתחנה, אזי פונקציית הצפיפות הינה $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & ,0 \le x \le 30 \\ 0 & ,else \end{cases}$.

א). הסיכוי שהאדם יחכה 10 דקות לפחות הוא $\int_{10}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{2}{3}$.

ב). בהנחה כי האדם כבר חיכה 15 דקות, הסיכוי כי יחכה עוד 10 דקות הוא

$$P\left(X \ge 25 \,|\, X \ge 15 \right) = \frac{P\left(X \ge 25 \cap X \ge 15 \right)}{P\left(X \ge 15 \right)} = \frac{P\left(X \ge 25 \right)}{P\left(X \ge 15 \right)}$$

נציב את פונ' הצפיפות:

$$\frac{\int_{25}^{30} \frac{dx}{30}}{\int_{15}^{30} \frac{dx}{30}} = \frac{\left. \frac{x}{30} \right|_{25}^{30}}{\left. \frac{x}{30} \right|_{15}^{30}} = \frac{\frac{5}{30}}{\frac{15}{30}} = \frac{1}{3}.$$

<u>תרגיל 2</u>

משך הזמן (בשעות) הדרוש לתיקון מכונה הוא משתנה מקרי המתפלג מעריכית עם הפרמטר $\lambda = \frac{1}{2}$.

1. חשב את ההסתברות שזמן התיקון יעלה על שעתיים.
2. חשב את ההסתברות שזמן התיקון יעלה על 10 שעות בהינתן שהוא מעל 9 שעות.
3. מהי תוחלת זמן התיקון?

פתרון:

א). נסמן ב- X את הזמן שלוקח לתקן את המכונה, אזי $f_X(t) = 2e^{-2t}$. הסיכוי שהזמן ייקח יותר משעתיים הינו $\int_2^{\infty} 2e^{-2t}dt = -e^{-2t}\Big|_2^{\infty} = e^{-4}$.

ב). נעזר בתכונת חוסר הזכרון של ההתפלגות המעריכית

$$P(x > 10 \mid x > 9) = P(X > 1)$$

כלומר, הסיכוי שייקח 10 שעות בהינתן שיקח לפחות 9 הוא כמו הסיכוי שייקח שעה אחת ללא תנאים מקדימים.

$$P\left(X > 1\right) = \int_1^{\infty} 2e^{-2t}dt = -e^{-2t}\Big|_1^{\infty} = e^{-2}$$

ג). תוחלת זמן התיקון: $E(X) = 1/\lambda = \frac{1}{1/2} = 2$

השונות – לא נתבקשנו אמנם, אך קל לחשב בהתפלגות ידועה:

$$V\left(X\right) = 1/\lambda^2 = \frac{1}{\left(1/2\right)^2} = 4$$

<u>תרגיל 3</u>

אדם קולע למטרה. פגיעה במרחק שאינו עולה על ס"מ אחד מהמטרה מזכה אותו ב-10 נקודות, פגיעה במרחק שבין 1 ס"מ ל-3 ס"מ מזכה אותו ב-5 נקודות, ופגיעה במרחק שבין 3 ס"מ ל-5 ס"מ מזכה אותו ב 3 נקודות. מצא תוחלת מספר הנקודות שצבר, אם למרחק בין המטרה לנקודה שבה פגע יש התפלגות גמה עם הפרמטרים $\alpha = 2$ ו-$\lambda = 1/3$.

פתרון:

נסמן ב- X את המרחק שבין הפגיעה למטרה, אזי הוא פונקציית הצפיפות שלו הינה

$f_X(t) = \frac{t}{9}e^{-\frac{t}{3}}$. נסמן ב Y את מספר הנקודות שצבר, אזי

$$P(Y=10 \mid X \le 1) + P(Y=5 \mid 1 < X \le 3) + P(Y=3 \mid 3 < X \le 5) = 1$$

התוחלת של מספר הנקודות שצבר הינה

$$10\int_0^1 f_X(t)dt + 5\int_1^3 f_X(t)dt + 3\int_3^5 f_X(t)dt = E(Y).$$

כעת,

$$10\int_0^1 f_X(t)dt = 10\int_0^1 \frac{t}{9}e^{-\frac{t}{3}}dt = -\frac{10}{3}te^{-\frac{t}{3}} - 10e^{-\frac{t}{3}}\Big|_0^1 = 10 - \frac{40}{3}e^{-\frac{1}{3}} = 7.6116$$

$$5\int_1^3 f_X(t)dt = 5\int_1^3 \frac{t}{9}e^{-\frac{t}{3}}dt = -\frac{5}{3}te^{-\frac{t}{3}} - 5e^{-\frac{t}{3}}\Big|_1^3 = \frac{5}{3}e^{-\frac{1}{3}} + 5e^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}\cdot 3e^{-1} - 5e^{-1}$$
$$= 1.0981$$

$$3\int_3^5 f_X(t)dt = 3\int_3^5 \frac{t}{9}e^{-\frac{t}{3}}dt = -te^{-\frac{t}{3}} - 3e^{-\frac{t}{3}}\Big|_1^3 = 3e^{-1} + 3e^{-1} - 5e^{-\frac{5}{3}} - 3e^{-\frac{5}{3}}$$
$$= 0.6963$$

ולכן $E(Y)=9.406$.

<u>תוחלת ושונות מותנה, תוחלת ושונות נשנית, שונות משותפת ומתאם</u>

<u>נוסחאות</u>

תוחלת מותנה:

$$\mathrm{E}(X\mid Y=y)=\sum_x x\,\mathrm{P}(X=x\mid Y=y)=\sum_x x\,\frac{\mathrm{P}(X=x,Y=y)}{\mathrm{P}(Y=y)}$$

תוחלת נשנית:

$$\mathrm{E}\left(X\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(X\mid Y\right)\right)=\sum_y \mathrm{E}(X\mid Y=y)\cdot\mathrm{P}(Y=y)$$

שונות נשנית:

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{Var}\left(Y\mid X\right)\right)+\mathrm{Var}\left(\mathrm{E}\left(Y\mid X\right)\right)$$

<u>תרגיל 4</u>

יואב וחנן זורקים לסל כדורים לסירוגין. יואב קולע בסיכוי 0.7 וחנן בסיכוי 0.4.

חנן מתחיל. המשחק נעצר כאשר חנן קולע ראשון.

1. מהי תוחלת מספר הקליעות של יואב בזמן זה?
2. מהי השונות?

פתרון:

א). נסמן ב- X את הקליעה הראשונה של חנן. נסמן ב- W את מספר הקליעות של יואב עד הקליעה הראשונה של חנן.

לכל ¥ $k\in$, $W\mid X=k\sim Bin(k-1,0.7)$ ולכן

$E(W\mid X=k)=0.7(k-1)$ ו- $V(W\mid X=k)=0.7\cdot 0.3(k-1)$.

כתוצאה מכך, $E(W\mid X)=0.7(X-1)$

$V(W\mid X)=0.7\cdot 0.3(X-1)=0.21(X-1)$.

לפי חוק התוחלת החוזרת

$$E(W)=E\left(E\left(W\mid X\right)\right)=E(0.7X-0.7)=0.7E(X)-0.7$$
$$=\frac{0.7}{0.4}-0.7=1.05$$

ב). לפי חוק פירוק השונות

$$V(W)=V\left[E(W\mid Y)\right]+E\left[V(W\mid Y)\right]$$
$$=V(0.7Y-0.7)+E(0.21Y-0.21)$$
$$=0.7^2\cdot\frac{0.6}{0.4^2}+\frac{0.21}{0.4}-0.21=2.1525$$

<u>תרגיל 5</u>

במשחק מזל מטילים קוביה הוגנת פעם אחת. תהי N תוצאת ההטלה. כעת מטילים מטבע N פעמים המטבע שמצידו האחד חקוק "1" ומצידו האחר "0". הסתברויות הטלת המטבע C הן: $P\left(C=0\right)=1-p,\ \ P\left(C=1\right)=p,\ \ p\in\left(0,1\right)$. הרווח בכל הטלת המטבע היא תוצאת ההטלה. מהי תוחלת סה"כ הרווח במשחק ומהי שונותו?

פתרון:

נגדיר $N\sim U_d\left[1,6\right]$ – התפלגות הטלת הקוביה.

$X\mid N\sim Bin\left(N,p\right)$ – התפלגות המותנה (בהינתן N) של הרווח מסדרת הטלות המטבע.

התוחלת: נעזר בנוסחת התוחלת הנשנית (נפתור דרך התניה)

$$E\left(X\right)=E\left(E\left(X\mid N\right)\right)=\underbrace{E\left(N\cdot p\right)}_{X\mid N\sim Bin\left(N,p\right)}=p\underbrace{E\left(N\right)}_{N\sim U[1,6]}=p\cdot\underbrace{3.5}_{\frac{(1+6)}{2}}$$

השונות: נעזר בנוסחת פירוק השונות

$$\begin{aligned}V(X) &= E\left(V(X\mid N)\right)+V\left(E(X\mid N)\right)\\ &= E\left(N\cdot p(1-p)\right)+V(N\cdot p)\\ &= p(1-p)\cdot E(N)+p^2\cdot V(N)\\ &= p(1-p)\cdot\frac{7}{2}+p^2\cdot\frac{6^2-1}{12}=\frac{7}{2}p-\frac{7}{12}p^2\end{aligned}$$

<u>תרגיל 6</u>

מטילים מטבע הוגן n פעמים $\Omega=\{H,T\}^n$. נגדיר: X – מס' הפעמים שהתקבל "H", Y – מס' הפעמים שהתקבל "T". חשב את המתאם $\rho(X,Y)$.

פתרון:

נשתמש בהגדרת מקדם המתאם $\rho(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$

נחשב את $Cov(X,Y)$ ע"י שימוש בתכונות הקוואריאנס וכן ש- $X+Y=n$,

$$Cov(X,Y)=Cov(X,N-X)=Cov(X,N)+Cov(X,-X)$$

נפתח את אגף ימין ונשתמש בכך שתוחלת של קבוע היא הקבוע.

$$\begin{aligned}&=\left[E(X\cdot n)-E(X)E(n)\right]-V(X)\\ &=nE(X)-nE(X)-V(X)=-V(X)\end{aligned}$$

כעת, השונות של Y, $V(Y)=V(n-X)=(-1)^2V(X)=V(X)$

נציב בנוסחת המתאם ונקבל, $\rho(X,Y)=\dfrac{-V(X)}{\sqrt{V(X)V(X)}}=-1$

<u>פונקציה יוצרת מומנטים</u>

<u>פונקציה יוצרת מומנטים – הגדרה</u>:

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

<u>שימושי פונקציה יוצרת מומנטים:</u>

1. <u>יצירת המומנט מסדר r=1,2,3) r…) של X</u>:

$$\left.\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = E\left(X^r\right)$$

הערה – מומנט ראשון: הוא התוחלת; מומנט שני: מגדיר את השונות ומאפשר חישובה.

2. פונקציה יוצרת מומנטים מגדירה באופן חד-חד-ערכי התפלגות. כלומר, לכל התפלגות יש רק פונקציה יוצרת מומנטים יחידה. לכן בשאלות של זיהוי התפלגות ניתן לחשב את פונקציה יוצרת המומנטים המתאימה.

3. יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים <u>בלתי תלויים</u> עם פונקציות יוצרות מומנטים, $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \ldots, M_{X_n}(t)$, בהתאמה, אזי $M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$.

בפרט, לשני משתנים X ו-Y בלתי תלויים: $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$

<u>שאלה 7</u>

יהי X משתנה מקרי בינומי עם פרמטרים n ו-p.

1. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים שלו.
2. חשב בעזרת הפי"מ את התוחלת ואת השונות של X.
3. יהיו $X \sim Bin(n,p), \quad Y \sim Bin(m,p), \quad Z \sim Bin(k,p)$. X,Y,Z ב"ת.

   מהי ההתפלגות של המ"מ W, השווה לסכום W=X+Y+Z.

פתרון:

א). חישוב לפי הגדרת פי"מ:

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{k=0}^{n}e^{tk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^t)^k(1-p)^{n-k}=(pe^t+1-p)^n$$

ב). התוחלת:

$$M'(t)=n(pe^t+1-p)^{n-1}pe^t$$
$$\Rightarrow E(X)=M'(0)=np$$

השונות:

תחילה נחשב את המומנט השני בעזרת הפי"מ-

$$M''(t)=n(n-1)(pe^t+1-p)^{n-2}(pe^t)^2+n(pe^t+1-p)^{n-1}pe^t$$
$$\Rightarrow E(X^2)=M''(0)=n(n-1)p^2+np$$

ומכאן השונות של X נתונה ע"י:

$$V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=$$
$$=\left[n(n-1)p^2+np\right]-n^2p^2=np(1-p)$$

ג). נעזר בפי"מ של מ"מ מההתפלגות הבינומית,

$$M_W(t)=M_{X+Y+Z}(t)=M_X(t)\cdot M_Y(t)\cdot M_Y(t)$$
$$=(pe^t+1-p)^n(pe^t+1-p)^m(pe^t+1-p)^k$$
$$=(pe^t+1-p)^{n+m+k}$$

כלומר, קיבלנו ש- $M_W(t)=(pe^t+1-p)^{n+m+k}$ וזוהי צורת פונקציה יוצרת מומנטים של התפלגות בינומית עם הפרמטרים m+n+k ו-p , ולכן זוהי ההתפלגות של W, $W\sim Bin(n+k+k,p)$.

<u>שאלה 8</u>

נתון $X\sim N(0,1)$.

1. חשב את הפונ' יוצרת המומנטים של המ"מ $Y=Z^2$.
2. יהיו $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ סדרת מ"מ ב"ת ושווי התפלגות כפי שהוגדר בסעיף א'.

מצא את ההתפלגות של $W=\sum_{i=1}^{n}Y_i$.

פתרון:

א). פונ' הצפיפות של X, היא נורמלית $\left(-\infty < x < \infty\right)$ $f_X\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

נפתח לפי ההגדרה את הפי"מ,

$$M_Y\left(t\right) = M_{X^2}\left(t\right) = E\left(e^{tX^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2(1-2t)/2} dx$$

האינטגרל מסורבל לחישוב ישיר, לכן נרצה להשלים לפונ' צפיפות מוכרת – שאז האינטגרל שלה שווה ל- 1.

נציב $\sigma^2 = 1/\left(1-2t\right)$ ונקבל:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \sigma \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx}_{1} = \sigma$$

האינטגרל שווה ל-1 משום שהוא אינטגרל של פונ' צפיפות של מ"מ המתפלג $N\left(0,\sigma^2\right)$.

נציב חזרה $\sigma^2 = 1/\left(1-2t\right)$ ונקבל את הפי"מ של Y:

$$M_Y\left(t\right) = \sigma = \sqrt{\frac{1}{1-2t}} = \left(1-2t\right)^{-1/2} \qquad \left(t < 1/2\right)$$

הערה: הפי"מ שקיבלנו מתאימה להתפלגות חי-בריבוע עם דרגת חופש אחת, לכן ניתן לקבוע ש-Y מתפלג חי-בריבוע (עם ד"ח 1), $Y \sim \chi^2_{(1)}$.

ב). נכליל את תוצאת סעיף א', שוב בעזרת פי"מ.

$$M_W = M_{\sum_{i=1}^{n} Y_i} \overset{(*)}{=} M_{Y_1} \cdot M_{Y_2} \cdots M_{Y_n} \overset{(**)}{=} \left(M_{Y_1}\right)^n$$

כאשר, במעבר (*) השתמשנו בעובדה שהמ"מ ב"ת. במעבר (**) השתמשנו בעובדה שהם שווי התפלגות. בעזרת תוצאת סעיף א', נקבל:

$$M_W = \left(M_{Y_1}\right)^n = \left(\left(1-2t\right)^{-1/2}\right)^n = \left(1-2t\right)^{-n/2}$$

לכן ניתן לקבוע ש-W מתפלג חי-בריבוע (עם n ד"ח), $W \sim \chi^2_{(n)}$.