# <u>פתרון הבוחן</u>

1) את כל ההגדרות ניתן למצוא בתרגול ובהרצאה.

2)

א. נוכיח את שלוש התכונות:

1. $\varnothing \in \tau$ מההגדרה, $\mathbb{R} \in \tau$ מכיוון ש- $\left|\mathbb{R}^C\right| = \left|\varnothing\right| < \aleph_0$.

2. יהיו $U,V \in \tau$. מקרה ראשון: $U = \varnothing \ \vee V = \varnothing$ אזי $U \bigcap V = \varnothing \in \tau$.

מקרה שני: $\left|U^c\right|,\left|V^c\right| \le \aleph_0$ אזי

$$\left|\left(U \bigcap V\right)^C\right| = \left|U^C \cup V^C\right| \le \left|U^c\right| + \left|V^c\right| \le \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

3. יהי $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$. מקרה ראשון: $\forall i \ \ U_i = \varnothing$ אזי $\bigcup_{i\in I} U_i = \varnothing \in \tau$. מקרה שני:

קיים $i_0 \in I$ כך שהקבוצה ${U_{i_0}}^C$ בת מניה. $\bigcup_{i\in I} U_i \supseteq U_{i_0}$ ומכאן

$\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^C \subseteq {U_{i_0}}^c$ ולכן נסיק שגם $\left|\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^C\right| \le \aleph_0$ ומכאן $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.

הערה: ניתן היה מראש לעבור למשלים ולציין שקבוצה היא סגורה אם ורק אם היא בת מניה או המרחב כולו ואז להוכיח שאכן מתקיימות שלוש התכונות המאפיינות קבוצות סגורות .

ב. קל להוכיח שבכל מ"ט כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת לאותו הקבוע (יתכן שיהיו גבולות נוספים). נוכיח שבמ"ט זה גם ההיפך מתקיים. נניח שהסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל $x$ במ"ט זה. $U = \left(X \setminus \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) \cup \{x\}$ סביבה פתוחה של $x$ (מדוע?).

מהגדרת התכנסות נקבל שקיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge n_0$

$x_n \in U = \left(X \setminus \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) \cup \{x\}$. מכאן, לכל $n \ge n_0$ $x_n = x$.

בכל מ"ט מתקיים $A \subseteq scl(A)$. אצלנו גם ההכלה ההפוכה מתקיימת. כי אם $x \in scl(A)$ אז לפי ההגדרה קיימת סדרה $\{x_n\} \subseteq A$ המתכנסת ל $x$. הוכחנו שבהכרח קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge n_0$ $x_n = x$. מכיון ש $\{x_n\} \subseteq A$ נסיק ש $x \in A$.

ג. בעצם עלינו למצוא קבוצה שאינה סגורה. כל קבוצה שאינה בת מניה שאינה $\mathbb{R}$ אינה סגורה (למה?). ניתן לקחת למשל את קבוצת האירציונליים.

בכל מ"מ מתקיים לכל תת קבוצה $A$ , $cl(A) = scl(A)$. במ"ט שלנו קיימת $A$ כך ש $cl(A) \neq A$ (למשל קבוצת האירציונליים כפי שציינו). מצד שני עפ"י סעיף ב' $scl(A) = A$. לכן בסה"כ $cl(A) \neq scl(A)$ ומכאן שמ"ט זה אינו מטריזבילי.

3) א. כל כדור פתוח במ"מ הוא קבוצה פתוחה. כמו כן כל כדור סגור הוא קבוצה סגורה. מתקיים $B_{d_5}\left[0,\frac{1}{125}\right] = B_{d_5}\left(0,\frac{1}{25}\right)$ (למה?) ולכן הקבוצה סגוחה.

ב. הוכחתם בש"ב ש $\chi_A$ רציפה אם ורק אם $A$ סגוחה.

1. $A = B_{d_5}\left(0,\frac{1}{25}\right)$ סגוחה (סעיף א') ולכן הפונקציה רציפה.

2. $X = \mathbb{Z}$ הוא ת"מ דיסקרטי שבו כל תת קבוצה סגוחה (אפשר גם להוכיח ישירות ש $\{0\} = A = B\left(0,\frac{1}{25}\right)$ סגוחה ככדור פתוח מצד אחד וכנקודון מצד שני). לכן גם כאן הפונקציה האופיינית רציפה.