

תרגיל בית 6 - תורת גלואה סמסטר א', תשע"ז

שאלה 0.1. האם ההרחבות הבאות הן נורמליות? אם לא, הרחיבו אותם לסגור הנורמלי ע"י סיפוח שורשים של היוצרים:

1. $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]/\mathbb{Q}$

2. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]$

3. $\mathbb{Q}[\rho_5]$

שאלה 0.2. הוכיחו כי כל הרחבה K/F ממימד 2 היא נורמלית.

שאלה 0.3. העזרו בתרגיל בית הקודם וחשבו את תת-השדות של ההרחבות הבאות:

1. שדה הפיצול של $x^3 - 5$ מעל \mathbb{Q} .

2. שדה הפיצול של $x^7 - 1$ מעל \mathbb{Q} .

3. שדה הפיצול של $x^4 + 1$ מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (שימו לב ש $\rho_8 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$).

שאלה 0.4. תהי E/F הרחבת גלואה ממימד p^n עבור מספר ראשוני p . הוכיחו כי יש שדות ביניים ממימד p ו $p-1$.
(רמז: משפטי סילוא)

שאלה 0.5. יהי E שדה הפיצול של פולינום אי-פריק $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, ויהי $\alpha \in E$ שורש של $f(x)$.

נתון כי $Gal(E/\mathbb{Q}) \cong S_4$ הוכיחו כי אין תת שדות לא טריוויאלים בהרחבה $\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$.

האם $\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$ היא הרחבת גלואה?

עובדה שימושית מתורת החבורות: S_3 היא ת"ח מקסימלית של S_4 (כלומר שאין ת"ח חוץ מ S_4 ו S_3 שמכילות את S_3).