לינארית להנדסה- פתרון תרגיל 10

תרגיל 1.

1. יהי $B=\{v_1,\dots v_n\}$ קבוצה בת"ל ו-$v_{n+1}\notin Span\{B\}$ הוכיחו ש-$B'=B\bigcup\{v_{n+1}\}$ בת"ל
2. יהי $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ קבוצה בת"ל השלימו את B לבסיס ל-$\mathbb{R}^4$

פתרון.

1. **יהי צ"ל של אברי B' ששווה ל-0 נראה שהצירוף חייב להיות הצירוף הטריוואלי.**

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i v_i=0\\ \Downarrow\\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i+\alpha_{n+1}v_{n+1}=0\\ \Downarrow\\ v_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}-\frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}}v_i\end{gathered}$$

אם $\alpha_{n+1}=0$אז נקבל ש-B ת"ל בסתירה לנתון, ואם $\alpha_{n+1}\neq 0$ אז נקבל $v_{n+1}\in Span\{B\}$ בסתירה לנתון.

2.

פתרון. צריך למצוא שני בתל $\{v_1,v_2\}$ כך ש-$v_1,v_2\notin Span\{B\}$ כדי למצוא שני וקטורים כאלו נאפיין את $Span(B)$ בעזרת משוואות

$$\begin{aligned}Span(B) &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\exists a,b: a\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\right\} =\\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\exists a,b: a\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\left(\begin{array}{cc|c}1&1&x\\2&-1&y\\3&1&z\\4&1&w\end{array}\right)\right\} =\\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\left(\begin{array}{cc|c}1&1&x\\2&-1&y\\0&-2&z-3x\\0&3&w-4x\end{array}\right)\right\} =\\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\left\{\begin{array}{l}z-3x=0\\w-4x=0\end{array}\right.\right\}\end{aligned}$$

אנחנו רוצים ווקטורים שלא שייכים ל-$span\left\{ B\right\}$ לכן נבחר ווקטורים לא מקיימים את התנאים הנ"ל למשל

$$\left\{ v_{1}=\left(\begin{array}{c}1\\0\\1\\0\end{array}\right),v_{2}=\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\\1\end{array}\right)\right\}$$

יעבודו, מכאן ש-

$$\left\{ \left(\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}1\\-1\\1\\1\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}1\\0\\1\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\\1\end{array}\right)\right\}$$

הוא בסיס ל-$\mathbb{R}^{4}$

תרגיל 2. הוכח\הפרך : יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ אז

$$rank\left(A+B\right)\leq rank\left(A\right)+rank\left(B\right)$$

פתרון.

יהי $\left\{ v_{1},\dots v_{m}\right\}$ בסיס ל-$C\left(A\right)$ ו-$\left\{ w_{1},\dots w_{k}\right\}$ בסיס ל-$C\left(A\right)$, נתבונן בעמודה $A+B$

$$C_{i}\left(A+B\right)=C_{i}\left(A\right)+C_{i}\left(B\right)=\sum_{i=1}^{m}\beta_{i}v_{i}+\sum_{i=1}^{k}\gamma_{i}w_{i}$$

מכאן שמרחב העמודות של $A+B$ מקיים

$$C\left(A+B\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}C_{i}\left(A+B\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}\left(\sum_{i=1}^{m}\beta_{i}v_{i}+\sum_{i=1}^{k}\gamma_{i}w_{i}\right)\subseteq Span\left\{ v_{1},\dots,v_{m},w_{1},\dots,w_{k}\right\}$$

מכאן שמתקיים

$$rank\left(A+B\right)=dim\left(C\left(A+B\right)\right)\leq m+k=rank\left(A\right)+rank\left(B\right)$$

תרגיל 3. תהי מטריצה $A\in M_{4\times8}\left(\mathbb{R}\right)$ כך ש-$Rank\left(A\right)=4$

1. האם שורות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?
2. האם עמודות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?
3. למה שווה $dim\left(N\left(A\right)\right)$?

פתרון.

1. **נתון ש-**

$$Rank\left(A\right)=dim\left(R\left(A\right)\right)=4$$

ויש 4 שורות, לכן שורות A בת"ל.

2. **נתון ש-**

$$Rank\left(A\right)=dim\left(C\left(A\right)\right)=4$$

ויש 8 עמודות לכן, עמודות A ת"ל

3. **ידוע ש-**

$$Rank\left(A\right)+dim\left(N\left(A\right)\right)=8$$

לכן

$$4+dim\left(N\left(A\right)\right)=8$$

מכאן

$$dim\left(N\left(A\right)\right)=8-4=4$$

תרגיל 4. הפוך את הקבוצה $\left\{ v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ לקבוצה אורתונורמלית.

פתרון.
נבחר $w_1=v_1$

$$w_2=v_2-\frac{<v_2,w_1>}{||w_1||^2}w_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}w_3&=v_3-\frac{<v_3,w_1>}{||w_1||^2}w_1-\frac{<v_3,w_2>}{||w_2||^2}w_2\\&=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{(\frac{1}{2})}{(\frac{6}{4})}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

כעת $\{w_1,w_2,w_3\}$**אורתוגונאלית (בדקו!). ננרמל את הוקטורים**

$$||w_1||=\sqrt{2}\quad ||w_2||=\frac{\sqrt{6}}{2}\quad ||w_3||=\frac{\sqrt{12}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

כעת $\left\{\frac{w_1}{||w_1||},\frac{w_2}{||w_2||},\frac{w_3}{||w_3||}\right\}$ **קבוצה אורתונורמלית.**

תרגיל 5. הוכיחו ש-$\langle A,B\rangle=tr\left(AB^t\right)$ היא מכפלה פנימית מעל $V=\mathbb{R}^{n\times n}$

פתרון.
כדי להוכיח ש- $\langle A,B\rangle=tr\left(AB^t\right)$ **היא מכפלה פנימית יש להוכיח 3 תכונות (לינארית ברכיב הראשון, הרמיטיות, אי-שליליות)**

1. לינאריות:

$$\begin{aligned}\langle A+\alpha B,C\rangle &=\\ tr\left(\left(A+\alpha B\right)C^t\right)&=\\ tr\left(AC^t+\alpha BC^t\right)&=\\ tr\left(AC^t\right)+\alpha tr\left(\alpha BC^t\right)&=\\ \langle A,C\rangle+\alpha\langle B,C\rangle\end{aligned}$$

2. **הרמיטיות (סימטריות):**

$$\begin{aligned} \langle A,B\rangle &= \\ tr\left(AB^t\right) &= \\ tr\left(\left(AB^t\right)^t\right) &= \\ tr\left(BA^t\right) &= \\ \langle B,A\rangle \end{aligned}$$

3. **אי-שליליות**

$$\begin{aligned} \langle A,A\rangle &= \\ tr\left(AA^t\right) &\overset{*}{=} \\ \textstyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2 &\geq \\ 0 \end{aligned}$$

ומתקיים

$$\langle A,A\rangle=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2=0\Leftrightarrow\forall i,j:a_{ij}=0$$

***אם נסמן את B להיות AA^t אז**

$$b_{jj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}a_{ij}^t=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}a_{ji}=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}^2$$

לכן

$$tr\left(B\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2$$

שלושת התכונות מתקיימות, לכן זאת מכפלה פנימית.

תרגיל 6. הוכיחו שמתקיים $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$.
שוויון זה נקרא כלל המקבילית כי מבחינה גאומטרית הוא הקובע שבמקבילית סכום ריבועי ארבע צלעות שווה לסכום ריבועי האלכסונים.

פתרון.
נתחיל מאגף שמאל ונגיע לאגף ימין

פתרון.

$$\begin{aligned} &= \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 \\ &\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle+\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle+\langle x,x\rangle+\langle -y,x\rangle+\langle x,-y\rangle+\langle -y,-y\rangle \\ &= \|x\|^2+\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle+\|y\|^2+\|x+y\|^2-\langle y,x\rangle-\langle x,y\rangle+\|-y\|^2 \\ &2\|x\|^2+2\|y\|^2 \end{aligned}$$

תרגיל 7. יהא V מעל $\mathbb{F}$ ממ״פ עם מ״פ $\langle v,u\rangle$.

1. הוכיחו כמעט לינארית ברכיב שני. כלומר הוכיחו כי $\langle v,\alpha u+w\rangle=\bar{\alpha}\langle v,u\rangle+\langle v,w\rangle$ (לכל $v,u,w\in V$ ולכל α סקלאר)
2. יהא $B=\{v_1,\dots v_n\}$ בסיס. יהא $v\in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i,v\rangle=0$. הוכח כי $v=0$
3. יהא $B=\{v_1,\dots v_n\}$ בסיס. יהיו $v,u\in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i,v\rangle=\langle v_i,u\rangle$. הוכח כי $v=u$
4. לכל $\alpha\in\mathbb{R}_{>0}$ נגדיר פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha:V\times V\to\mathbb{F}$ ע״י $\langle v,v'\rangle_\alpha=\alpha\cdot\langle v,v'\rangle$. הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha$ גם כן מ״פ על V.

פתרון.

1. **לפי הגדרת מכפלה פנימית ותכונות הצמוד המרוכב נקבל כי**

$$\langle v,\alpha u+w\rangle=\overline{\langle \alpha u+w,v\rangle}=\overline{\langle \alpha u,v\rangle+\langle w,v\rangle}=\overline{\alpha\langle u,v\rangle+\langle w,v\rangle}=\bar{\alpha}\overline{\langle u,v\rangle}+\overline{\langle w,v\rangle}=\bar{\alpha}\langle v,u\rangle+\langle v,w\rangle$$

2. **כיוון ש B בסיס, קיים צירוף לינארי**

$$v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$$

ולכן

$$\langle v,v\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i,v\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle v_i,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i 0=0$$

ולכן מתכונות מכפלה פנימית $v=0$ כנדרש.

3. **גכעג**

$$\begin{gathered}\langle v_i,v\rangle=\langle v_i,u\rangle\\ \Downarrow\\ \langle v_i,v\rangle-\langle v_i,u\rangle=0\\ \Downarrow\\ \langle v_i,v-u\rangle=0\\ \Downarrow\\ v-u=0\\ \Downarrow\\ v=u\end{gathered}$$

4. **כן! נבדוק את אקסיומות מ"פ בהסתמך שהאקסימות מתקיימות עבור $\langle v,v'\rangle$**

(א) **לינאריות ברכיב הראשון:**

$$\langle v+\beta u,w\rangle_\alpha=\alpha\cdot\langle v+\beta u,w\rangle=\alpha\cdot[\langle v,w\rangle+\beta\cdot\langle u,w\rangle]=\alpha\cdot\langle v,w\rangle+\beta\cdot\alpha\cdot\langle u,w\rangle=\langle v,w\rangle_\alpha+\beta\cdot\langle u,w\rangle_\alpha$$

(ב) **הרמטיות:**

$$\langle v,v'\rangle_\alpha=\alpha\cdot\langle v,v'\rangle=\alpha\cdot\overline{\langle v',v\rangle}=\overline{\alpha\cdot\langle v',v\rangle}=\overline{\langle v',v\rangle_\alpha}$$

כאשר השיוון השלישי נכון בגלל ש $\alpha\in\mathbb{R}$ ולכן $\bar{\alpha}=\alpha$

(ג) **אי שליליות**

$$\langle v,v\rangle_\alpha=\alpha\cdot\langle v,v\rangle\geq 0$$

ככפל של 2 מספרים ממשים אי שלילים. בנוסף $\langle v,v\rangle_\alpha=\alpha\cdot\langle v,v\rangle=0$ אמ"מ $\langle v,v\rangle=0$ (כי $\alpha\neq 0$) אמ"מ $v=0$.

תרגיל 8. נגדיר $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ כך

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2x+y+3z$$

ונגדיר קבוצה $\mathbb{R}^3\supseteq\left\{v\in\mathbb{R}^3:\ \|v\|=1\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2=1\right\}=S$ (כאשר $\|v\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית). מצאו

$$\max_{v\in S}f(v)$$

כלומר את הערך המקס' ש f מקבלת עבור קלטים מ S. [רמז: אי שיוויון קושי שוורץ, שימו לב כי $f(v)=\left\langle v,\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle$]

פתרון.

לפי קושי שוורץ במרחב $\mathbb{R}^3$ **עם המכפלה הסקלארית ו** $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **נקבל ש**

$$2x + y + 3z = |\langle v, u\rangle| \leq \|v\| \cdot \|u\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \sqrt{14}$$

ולכן עבור $v \in S$ **נקבל** $2x + y + 3z \leq \sqrt{14}$ **כלומר** $\max_{v\in S} f(v) \leq \sqrt{14}$ **. נראה כי מתקיים שיוון. אכן עבור** $t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **ו** $\frac{t}{\|t\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in S$ **מתקיים כי**

$$f(\frac{t}{\|t\|}) = \left\langle \frac{t}{\|t\|}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \sqrt{14}$$

וסיימנו.

תרגיל 9. תהי $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית ב-V הוכח שלכל $v \in V$ מתקיים $v - \sum_{i=1}^k \langle v, v_i\rangle v_i \in S^\perp$

פתרון. **כדי ש-** $w \in V$ **יהי שייך ל-** $S^\perp$ **צריך להוכיח ש-** $\forall v_j \in S : \ \langle w, v_j\rangle = 0$ **אז במקרה שלנו** $w = v - \sum_{i=1}^k \langle v, v_i\rangle v_i$

$$\begin{array}{rcccl}
\langle w, v_j\rangle & = & \left\langle v - \sum_{i=1}^k \langle v, v_i\rangle v_i, v_j \right\rangle & = & \\
& = & \langle v, v_j\rangle - \sum_{i=1}^k \langle v, v_i\rangle \langle v_i, v_j\rangle & = & \\
& = & \langle v, v_j\rangle - \langle v, v_j\rangle \langle v_j, v_j\rangle & = & \\
& = & \langle v, v_j\rangle - \langle v, v_j\rangle \|v_j\|^2 & = & \\
& = & \langle v, v_j\rangle - \langle v, v_j\rangle & = & 0
\end{array}$$

בהצלחה!!