

טורי חזקות סביב נקודה נתונה

הגדרה: טור פונקציות מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

נקרא טור חזקות סביב הנקודה $x = x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$).

משפט: תהי x_0 נקודה כלשהי ב- \mathbb{R} . אז לכל טור חזקות סביב הנקודה x_0 קיים מספר יחיד $0 \leq R \leq \infty$ כך שעבור $|x - x_0| < R$ הטור מתכנס ועבור $|x - x_0| > R$ הטור מתבדר. אם $R = 0$ הטור מתכנס בנקודה $x = x_0$ בלבד, אם $R = \infty$ הטור מתכנס לכל x ממשי. ל- R קוראים **הרדיוס התכנסות** של הטור.

הערה: אם R הוא רדיוס התכנסות של טור חזקות סביב $x = x_0$, אז בקצוות הקטע $(x_0 - R, x_0 + R)$ (כלומר בנקודות $x = x_0 \pm R$) הטור יכול להתכנס או להתבדר. כמו כן, לכל נקודה $a \in (x_0 - R, x_0 + R)$ הנמצאת בפנים הקטע הטור מתכנס בהחלט.

משפט קושי-אדמר: הרדיוס התכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ הוא

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

(במידה והגבול במכנה שווה לאפס אז $R = \infty$).

מבחן דלמבר: אם הגבול $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ קיים אז הרדיוס התכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ הוא $R = L$.

דוגמאות: מצאו את תחומי ההתכנסות של הטורים הבאים:

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^3}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n^2}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 e^{-nx}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{x+1} \right)^n \quad (x \neq -1)$

פתרון: 1. נשתמש במבחן דלמבר למציאת הרדיוס התכנסות,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{-n}}{3^{-n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3$$

לכן הטור מתכנס בקטע $(-3, 3)$. בקצוות הקטע $x = \pm 3$ קל לבדוק שהטור מתבדר.

2.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{(n+1)^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \right)^3 = 1^3 = 1 \end{aligned}$$

לכן הטור מתכנס בקטע $(2, 4) = (3-1, 3+1)$. קל לבדוק שהטור מתכנס גם בקצוות הקטע $x = 2, 4$. לכן התחום התכנסות הוא $[2, 4]$.

3. בסעיף זה לא ניתן להשתמש במבחן דלמבר כי חלק ממקדמי הטור a_n מתאפסים. למעשה מקדמי הטור נתונים בצורה מפורשת כ-

$$a_n = \begin{cases} 3^{\sqrt{n}}, & n \text{ is a square number,} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

לכן ממשפט קושי-אדמר נקבל

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |3^{\sqrt{n}}|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

לכן הרדיוס התכנסות הוא אחד ולכן הטור מתכנס בקטע $(-1, 1)$. קל לבדוק שהטור מתבדר בקצוות $x = \pm 1$.

4. אם נסמן $t = e^{-x}$ נקבל את הטור $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 t^n$. בדיוק כפי שהראינו בסעיף 2, ניתן להראות בעזרת מבחן דלמבר שהרדיוס התכנסות של טור זה הוא $R = 1$. קל לבדוק שהטור לא מתכנס בקצוות, לכן הטור מתכנס בתחום $t \in (-1, 1)$. מכאן נקבל שהטור המקורי מתכנס כאשר $e^{-x} \in (-1, 1)$, כיוון שפונקציית האקספוננט תמיד חיובית צריך למעשה לדרוש ש- $e^{-x} \in (0, 1)$, כלומר $x \in (0, \infty)$.

5. נסמן $t = \frac{x}{x+1}$ ונקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$. לפי מבחן דלמבר

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

לכן הטור מתכנס בקטע $(-1, 1)$. בקצה הימני $t = 1$ נקבל טור הרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, בקצה השמאלי נקבל טור לייבניץ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס. לכן הטור מתכנס בדיוק בתחום $(-1, 1)$. לכן, הטור המקורי יתכנס כאשר $\frac{x}{x+1} \in (-1, 1)$.

לכן קיבלנו שני אי שוויונים: $\frac{x}{x+1} \geq -1$ (*) ו- $\frac{x}{x+1} < 1$ (**). אי השוויון (*) מתקיים כאשר $x \in (-\infty, -1) \cup [-\frac{1}{2}, \infty)$, אי השוויון (**) מתקיים כאשר $x \in (-1, \infty)$. חיתוך התחומים האלו הוא התחום $[-\frac{1}{2}, \infty)$ ולכן הטור המקורי יתכנס בתחום זה.

דוגמא: נתון ש- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ הוא טור חזקות המתכנס בקטע $(-1, 1)$ ומתבדר בנקודות $x = \pm 1$. חשבו את הרדיוס התכנסות של הטורים הבאים:

$$1. g(x) = f(2x) \quad 2. h(x) = f\left(\frac{x}{3}\right) \quad 3. k(x) = f(x^2)$$

פתרון: בדוגמא זו נשתמש בכך שאם $\{a_n\}$ היא סדרה של מספרים אי שליליים ו- c מספר אי שלילי אז $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ וגם $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n}$. כיוון שהטור מתכנס בקטע $(-1, 1)$ ומתבדר בקצוות $x = \pm 1$ נובע שהרדיוס התכנסות שלו שווה ל-1. לכן מנוסחת קושי-אדמר נקבל כי $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = 1$.

1. נתון ש-

$$g(x) = f(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n x^n.$$

לכן מנוסחת קושי-אדמר הרדיוס התכנסות R של g שווה ל-

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |2^n c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 2 |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}.$$

2. כמו בסעיף הקודם ניתן להשתמש בנוסחת קושי-אדמר למציאת הרדיוס התכנסות. אך דרך פשוטה ופחות פורמלית למציאת הרדיוס התכנסות היא לשים לב שהטור $f = f(x)$ מתכנס רק כאשר $|x| < 1$, ולכן הטור $h(x) = f\left(\frac{x}{3}\right)$ יתכנס רק כאשר הארגומנט של f יהיה בערך מוחלט קטן מאחד, כלומר כאשר $|x| < 3$ או $|x| < 3$. לכן הרדיוס התכנסות הוא 3.

3. גם בסעיף זה ניתן למצוא את הרדיוס התכנסות בדרך פורמלית ובדרך פחות פורמלית. מהגדרת הפונקציה k נובע ש-

$$k(x) = f(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}.$$

$$a_n = \begin{cases} c_{n/2}, & n \text{ is even,} \\ 0, & n \text{ is odd.} \end{cases} \quad \text{כאשר } k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

לכן הרדיוס התכנסות של k יהיה

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_{n/2}|^{\frac{1}{n}}} = [n = 2m] = \frac{1}{\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |c_m|^{\frac{1}{2m}}} =$$

$$\frac{1}{\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt{|c_m|^{\frac{1}{m}}}} = \frac{1}{\sqrt{\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |c_m|^{\frac{1}{m}}}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1.$$

בדרך פחות פורמלית אפשר, כמו שראינו בסעיף 2, לומר שהטור $k(x) = f(x^2)$ מתכנס רק אם הארגומנט של f קטן מאחד, כלומר $|x^2| < 1$, או $|x| < 1$. לכן הרדיוס התכנסות הוא אחד.

הערה: לפעמים ניתן להשתמש בנוסחת סטירלינג $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$ במקרים בהם פונקציית העצרת מופיע במקדמים של טור החזקות.

דוגמאות: חשבו את התחום התכנסות של הטורים הבאים

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! 3^n} x^n \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!} (x-4)^n \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! n!} x^n$$

פתרון: 1. לפי נוסחת סטירלינג

$$\frac{n^n}{n! 3^n} \sim \frac{n^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n 3^n} = \frac{e^n}{3^n} = \left(\frac{e}{3}\right)^n.$$

לכן, מהנוסחה לחישוב הרדיוס התכנסות נקבל $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{e}{3}\right)^n}{\left(\frac{e}{3}\right)^{n+1}} = \frac{3}{e}$.
לכן הטור המקורי מתכנס בתחום $\left(-\frac{3}{e}, \frac{3}{e}\right)$ והוא לא מתכנס בקצוות כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n x^n$ לא מתכנס בקצוות.

2. גם בדוגמא זו ניתן להשתמש בנוסחת סטירלינג אך נח יותר יהיה פשוט להשתמש במבחן דלמבר:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{(2n+1)!}}{\frac{2^{n+1}}{(2n+3)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}{(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (2n+3)(2n+2) = \infty.$$

לכן הטור מתכנס לכל x .

3. לפי נוסחת סטירלינג

$$\frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{2^{2n} n^{2n}}{e^{2n}} = 2^{2n} = 4^n$$

מהנוסחה לחישוב רדיוס התכנסות נקבל $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{4^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. לכן הטור המקורי מתכנס בתחום $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ והוא לא מתכנס בקצוות כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n x^n$ לא מתכנס בקצוות.

גזירה ואינטגרציה איבר איבר של טור חזקות

משפט (על גזירה ואינטגרציה של טור חזקות): יהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות סביב $x=0$ עם רדיוס התכנסות R . אז:

א. לכל $|x| < R$ מתקיים

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

כמו כן לטור $f'(x)$ יש אותו רדיוס התכנסות R .

ב. לכל $|x| < R$ מתקיים

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

ולטור g יש אותו רדיוס התכנסות R .

הערה: ניתן לנסח את משפט הגזירה והאינטגרציה איבר איבר גם עבור טור חזקות סביב נקודה כללית $x_0 \in \mathbb{R}$, אבל בדוגמאות שניתקל בהן תמיד ניתן יהיה להניח ש- $x_0 = 0$.

דוגמאות: מצאו את סכומי הטורים הבאים:

$$\begin{array}{ll}
 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} & 2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n-1) x^{2n-2} \\
 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{2^n} & 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}
 \end{array}$$

פתרון:

1. ניתן לבדוק מיידית, ממשפט קושי-אדמר, שהרדיוס התכנסות של הטור הוא 1 (לא ניתן להשתמש במשפט דלמבר כי חלק ממקדמי הטור מתאפסים). לכן ממשפט הגזירה איבר איבר נקבל שלכל $|x| < 1$ מתקיים

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)x^{2n-2}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בנוסחא לסדרה הנדסית אינסופית. ממשפט הגזירה איבר איבר, הרדיוס התכנסות של טור הנגזרות גם שווה לאחד ולכן ממשפט האינטגרציה איבר איבר נקבל שלכל $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{2n-2} dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-2} dt \\
 &= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} \right)' dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} (\ln |1+t| - \ln |1-t|) \Big|_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{2} (\ln |1+x| - \ln |1-x|).
 \end{aligned}$$

2. גם בסעיף זה ניתן לבדוק מיידית שהרדיוס התכנסות הוא אחד, לכן ממשפט האינטגרציה איבר איבר נקבל שלכל $|x| < 1$ מתקיים

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n-1) t^{2n-2} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n-1) \int_0^x t^{2n-2} dt \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n-1) \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-1} = \frac{x}{1+x^2}.
 \end{aligned}$$

לכן ע"י גזירה של שני האגפים נקבל שלכל $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n-1) x^{2n-2} = \left(\frac{x}{1+x^2} \right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

3. ניעזר בזהות $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ שנכונה לכל $|x| < 1$. ע"י גזירה איבר איבר והכפלה ב- x של שני האגפים נקבל את הזהות $(*) \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ בתחום $|x| < 1$. ע"י גזירה והכפלה ב- x של שני האגפים של $(*)$ נקבל את הזהות

$$(**) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$$

שנכונה בתחום $|x| < 1$. לכן ע"י חיבור של $(*)$ עם $(**)$ נקבל שלכל $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + n)x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2 + x}{(1-x)^3} = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

בפרט אם נציב $x = \frac{1}{2}$ נקבל $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n}{2^n} = 8$.

4. נגדיר $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$ וקל לבדוק שלטור יש רדיוס התכנסות אחד. לכן ממשפט הגזירה איבר איבר נקבל שלכל $|x| < 1$ מתקיים

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n+1)x^{2n}}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n-1)}$$

ע"י חילוק שני האגפים של המשוואה האחרונה ב- x וגזירת שני האגפים נקבל לכל $|x| < 1$ את הזהות

$$\begin{aligned} \left(\frac{S'(x)}{x} \right)' &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x^{2n-1})'}{(2n-1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-1)x^{2n-2}}{(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

ע"י אינטגרציה של שני האגפים של המשוואה האחרונה נקבל שלכל $|x| < 1$, $\frac{S'(x)}{x} = \arctan(x)$ ואינטגרציה נוספת נקבל

$$S(x) = \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x t \arctan(t) dt = \frac{1}{2} \left((1+x^2) \arctan(x) - x \right)$$

זהות זו נכונה לכל $|x| < 1$. עכשיו ניקח את הגבול $x \rightarrow 1^-$ בשני האגפים של המשוואה האחרונה

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} &= S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} \left((1+x^2) \arctan(x) - x \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

פיתוח פונקציות לטור טיילור

הגדרה: נאמר שהפונקציה f , המוגדרת בתחום A , ניתנת לפיתוח לטור טיילור סביב הנקודה $x = x_0$ אם קיים טור חזקות סביב $x = x_0$ המתכנס ל- f בתחום A .

משפט: תנאי הכרחי לפיתוח פונקציה f לטור חזקות בתחום A הוא ש- f גזירה אינסוף פעמים בכל נקודה ב- A .

משפט טיילור: תהי f פונקציה הגזירה אינסוף פעמים בתחום A . תהי $x_0 \in A$ ולכל n שלם נגדיר את השארית

$$R_n(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) - \dots - \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

אז מתקיים השוויון $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ בתחום A אם ורק אם $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ לכל $x \in A$.

טורי טיילור של פונקציות אלמנטריות:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (|x| < \infty), \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|x| < \infty)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (|x| < \infty), \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1), \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (|x| < 1)$$

דוגמא: פתחו את $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ לטור טיילור סביב $x = 0$ וחשבו את $f^{(12)}(0)$.

פתרון: נשתמש בנוסחא של טור הנדסי

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} \quad (|x| < 1).$$

ממשפט טיילור נקבל ש- $\frac{f^{(12)}(0)}{12!}$ הוא המקדם של x^{12} בטור שהוא -1 . לכן $f^{(12)}(0) = -12!$

דוגמא: פתחו את $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+3}$ לטור טיילור סביב $x = -1$.

פתרון:

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{(x+1)^2 + 2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} \quad (|x+1| < \sqrt{2})$$

דוגמא: פתחו את $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ לטור טיילור סביב $x = 0$ וחשבו $f^{(9)}(0)$.

פתרון: נתבונן בנגזרת של הפונקציה $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1).$$

לכן ממשפט האינטגרציה איבר איבר נקבל שלכל $|x| < 1$:

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

כיוון ש- $f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ נקבל

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1)$$

כיוון שהמקדם של x^9 בפיתוח הוא $\frac{1}{9}$ נובע ש- $\frac{1}{9} = \frac{f^{(9)}(0)}{9!}$ ולכן $f^{(9)}(0) = \frac{9!}{9} = 8!$.

דוגמא: פתחו את $f(x) = \cos(x)$ לטור טיילור סביב $x = \frac{\pi}{4}$.

פתרון: נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ ונקבל

$$\cos(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} - \frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \quad (|x| < \infty) \end{aligned}$$