חשבון אינפי 2 למדמ"ח
שיעור 9: טורי חזקות

טורי חזקות סביב נקודה נתונה

הגדרה: טור פונקציות מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

נקרא טור חזקות סביב הנקודה $x=x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$).

משפט: תהי x_0 נקודה כלשהי ב־$\mathbb{R}$. אז לכל טור חזקות סביב הנקודה x_0 קיים מספר יחיד $0 \le R \le \infty$ כך שעבור $|x-x_0| < R$ הטור מתכנס ועבור $|x-x_0| > R$ הטור מתבדר. אם $R=0$ הטור מתכנס בנקודה $x=x_0$ בלבד, אם $R=\infty$ הטור מתכנס לכל x ממשי. ל־R קוראים **הרדיוס התכנסות** של הטור.

הערה: אם R הוא רדיוס התכנסות של טור חזקות סביב $x=x_0$, אז בקצוות הקטע (x_0-R, x_0+R) (כלומר בנקודות $x=x_0 \pm R$) הטור יכול להתכנס או להתבדר. כמו כן, לכל נקודה $a \in (x_0-R, x_0+R)$ הנמצאת בפנים הקטע הטור מתכנס בהחלט.

משפט קושי־אדמר: הרדיוס התכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ הוא

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

(במידה והגבול במכנה שווה לאפס אז $R=\infty$).

מבחן דלמבר: אם הגבול $L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ קיים אז הרדיוס התכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ הוא $R=L$.

דוגמאות: מצאו את תחומי ההתכנסות של הטורים הבאים:

$$1.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^3} \qquad 3.\ \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n^2}$$

$$4.\ \sum_{n=0}^{\infty} n^3 e^{-nx} \qquad 5.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n (x \neq -1)$$

פתרון: 1. נשתמש במבחן דלמבר למציאת הרדיוס התכנסות,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{-n}}{3^{-n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty} 3 = 3$$

לכן הטור מתכנס בקטע $(-3,3)$. בקצוות הקטע $x=\pm 3$ קל לבדוק שהטור מתבדר.

2.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{(n+1)^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\right)^3 = 1^3 = 1$$

לכן הטור מתכנס בקטע $(3-1,3+1)=(2,4)$. קל לבדוק שהטור מתכנס גם בקצוות הקטע $x=2,4$. לכן התחום התכנסות הוא $[2,4]$.

3. בסעיף זה לא ניתן להשתמש במבחן דלאמבר כי חלק ממקדמי הטור a_n מתאפסים. למעשה מקדמי הטור נתונים בצורה מפורשת כ־

$a_n = \begin{cases} 3^{\sqrt{n}}, n\, is\, a\, square\, number, \\ 0, otherwise. \end{cases}$. לכן ממשפט קושי־אדמר נקבל

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}|3^{\sqrt{n}}|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

לכן הרדיוס התכנסות הוא אחד ולכן הטור מתכנס בקטע $(-1,1)$. קל לבדוק שהטור מתבדר בקצוות $x=\pm 1$.

4. אם נסמן $t=e^{-x}$ נקבל את הטור $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 t^n$. בדיוק כפי שהראינו בסעיף 2, ניתן להראות בעזרת מבחן דלמבר שהרדיוס התכנסות של טור זה הוא $R=1$. קל לבדוק שהטור לא מתכנס בקצוות, לכן הטור מתכנס בתחום $t\in(-1,1)$. מכאן נקבל שהטור המקורי מתכנס כאשר $e^{-x}\in(-1,1)$, כיוון שפונקציית האקספוננט תמיד חיובית צריך למעשה לדרוש ש־$e^{-x}\in(0,1)$, כלומר $x\in(0,\infty)$.

5. נסמן $t=\frac{x}{x+1}$ ונקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$. לפי מבחן דלמבר

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1,$$

לכן הטור מתכנס בקטע $(-1,1)$. בקצה הימני $t=1$ נקבל טור הרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר, בקצה השמאלי נקבל טור לייבניץ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס. לכן הטור מתכנס בדיוק בתחום $[-1,1)$. לכן, הטור המקורי יתכנס כאשר $\frac{x}{x+1}\in[-1,1)$.

לכן קיבלנו שני אי שוויונים: $\frac{x}{x+1} \geq -1$ $(*)$ ו־ $\frac{x}{x+1} < 1$ $(**)$. אי השוויון $(*)$ מתקיים כאשר $x \in (-\infty, -1) \cup \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$, אי השוויון $(**)$ מתקיים כאשר $x \in (-1, \infty)$. חיתוך התחומים האלו הוא התחום $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$ ולכן הטור המקורי יתכנס בתחום זה.

דוגמא: נתון ש־ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ הוא טור חזקות המתכנס בקטע $(-1, 1)$ ומתבדר בנקודות $x = \pm 1$. חשבו את הרדיוס התכנסות של הטורים הבאים:

$$1.\ g(x) = f(2x) \quad 2.\ h(x) = f\left(\frac{x}{3}\right) \quad 3.\ k(x) = f\left(x^2\right)$$

פתרון: בדוגמא זו נשתמש בכך שאם $\{a_n\}$ היא סדרה של מספרים אי שליליים ו־c מספר אי שלילי אז $\overline{\lim}_{n\to\infty} c a_n = c\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ וגם $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n}$. כיוון שהטור מתכנס בקטע $(-1, 1)$ ומתבדר בקצוות $x = \pm 1$ נובע שהרדיוס התכנסות שלו שווה ל־1. לכן מנוסחת קושי־אדמר נקבל כי $\overline{\lim}_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}} = 1$.

1. נתון ש־

$$g(x) = f(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n x^n.$$

לכן מנוסחת קושי־אדמר הרדיוס התכנסות R של g שווה ל־

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}|2^n c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} 2|c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2\overline{\lim}_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}.$$

2. כמו בסעיף הקודם ניתן להשתמש בנוסחת קושי־אדמר למציאת הרדיוס התכנסות. אך דרך פשוטה ופחות פורמלית למציאת הרדיוס התכנסות היא לשים לב שהטור $f = f(x)$ מתכנס רק כאשר $|x| < 1$, ולכן הטור $h(x) = f\left(\frac{x}{3}\right)$ יתכנס רק כאשר הארגומנט של f יהיה בערך מוחלט קטן מאחד, כלומר כאשר $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$ או $|x| < 3$. לכן הרדיוס התכנסות הוא 3.

3. גם בסעיף זה ניתן למצוא את הרדיוס התכנסות בדרך פורמלית ובדרך פחות פורמלית. מהגדרת הפונקציה k נובע ש־

$$k(x) = f\left(x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}.$$

לכן $k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ כאשר $a_n=\begin{cases}c_{n/2}, n \, is \, even,\\ 0, n \, is \, odd.\end{cases}$

לכן הרדיוס התכנסות R של k יהיה

$$R=\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}|c_{n/2}|^{\frac{1}{n}}}=[n=2m]=\frac{1}{\overline{\lim}_{m\to\infty}|c_m|^{\frac{1}{2m}}}=$$

$$\frac{1}{\overline{\lim}_{m\to\infty}\sqrt{|c_m|^{\frac{1}{m}}}}=\frac{1}{\sqrt{\overline{\lim}_{m\to\infty}|c_m|^{\frac{1}{m}}}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1.$$

בדרך פחות פורמלית אפשר, כמו שראינו בסעיף 2, לומר שהטור $k(x)=f\left(x^2\right)$ מתכנס רק אם הארגומנט של f קטן מאחד, כלומר $|x^2|<1$, או $|x|<1$. לכן הרדיוס התכנסות הוא אחד.

הערה: לפעמים ניתן להשתמש בנוסחת סטירלינג $n!\sim(\frac{n}{e})^n$ במקרים בהם פונקציית העצרת מופיע במקדמים של טור החזקות.

דוגמאות: חשבו את התחום התכנסות של הטורים הבאים

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!3^n}x^n \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!}(x-4)^n \qquad 3.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!n!}x^n$$

פתרון: 1. לפי נוסחת סטירלינג

$$\frac{n^n}{n!3^n}\sim\frac{n^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n3^n}=\frac{e^n}{3^n}=\left(\frac{e}{3}\right)^n.$$

לכן, מהנוסחא לחישוב הרדיוס התכנסות נקבל $R=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{e}{3}\right)^n}{\left(\frac{e}{3}\right)^{n+1}}=\frac{3}{e}$.

לכן הטור המקורי מתכנס בתחום $\left(-\frac{3}{e},\frac{3}{e}\right)$ והוא לא מתכנס בקצוות כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^nx^n$ לא מתכנס בקצוות.

2. גם בדוגמא זו ניתן להשתמש בנוסחת סטירלינג אך נח יותר יהיה פשוט להשתמש במבחן דלמבר:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{(2n+1)!}}{\frac{2^{n+1}}{(2n+3)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(2n+3)(2n+2)=\infty.$$

לכן הטור מתכנס לכל x.

3. לפי נוסחת סטירלינג

$$\frac{(2n)!}{n!n!}\sim\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}}=\frac{\frac{2^{2n}n^{2n}}{e^{2n}}}{\frac{n^{2n}}{e^{2n}}}=2^{2n}=4^n$$

מהנוסחא לחישוב רדיוס התכנסות נקבל $R=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$. לכן הטור המקורי מתכנס בתחום $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ והוא לא מתכנס בקצוות כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}4^nx^n$ לא מתכנס בקצוות.

גזירה ואינטגרציה איבר איבר של טור חזקות

משפט (על גזירה ואינטגרציה של טור חזקות): יהי $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ טור חזקות סביב $x=0$ עם רדיוס התכנסות R. אז:

א. לכל $|x|<R$ מתקיים

$$f'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

כמו כן לטור $f'(x)$ יש אותו רדיוס התכנסות R.

ב. לכל $|x|<R$ מתקיים

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^ndt=\sum\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

ולטור g יש אותו רדיוס התכנסות R.

הערה: ניתן לנסח את משפט הגזירה והאינטגרציה איבר איבר גם עבור טור חזקות סביב נקודה כללית $x_0\in\mathbb{R}$, אבל בדוגמאות שניתקל בהן תמיד ניתן יהיה להניח ש־$x_0=0$.

דוגמאות: מצאו את סכומי הטורים הבאים:

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)x^{2n-2}$$

$$3.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n}{2^n} \qquad 4.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

פתרון:

1. ניתן לבדוק מיידית, ממשפט קושי־אדמר, שהרדיוס התכנסות של הטור הוא 1 (לא ניתן להשתמש במשפט דלמבר כי חלק ממקדמי הטור מתאפסים). לכן ממשפט הגזירה איבר איבר נקבל שלכל $|x|<1$ מתקיים

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)x^{2n-2}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בנוסחא לסדרה הנדסית אינסופית. ממשפט הגזירה איבר איבר, הרדיוס התכנסות של טור הנגזרות גם שווה לאחד ולכן ממשפט האינטגרציה איבר איבר נקבל שלכל $|x|<1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{2n-2}dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{2n-2}dt$$

$$=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{2n-1}\right)'dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|1+t|-\ln|1-t|\right)\Big|_{t=0}^{t=x}=\frac{1}{2}\left(\ln|1+x|-\ln|1-x|\right).$$

2. גם בסעיף זה ניתן לבדוק מיידית שהרדיוס התכנסות הוא אחד, לכן ממשפט האינטגרציה איבר איבר נקבל שלכל $|x|<1$ מתקיים

$$\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)t^{2n-2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)\int_0^x t^{2n-2}dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-1}=\frac{x}{1+x^2}.$$

לכן ע"י גזירה של שני האגפים נקבל שלכל $|x|<1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)x^{2n-2}=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

3. ניעזר בזהות $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ שנכונה לכל $|x| < 1$. ע"י גזירה איבר איבר והכפלה ב־x של שני האגפים נקבל את הזהות $(*)$ $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ בתחום $|x| < 1$. ע"י גזירה והכפלה ב־x של שני האגפים של $(*)$ נקבל את הזהות

$$(**)\ \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

שנכונה בתחום $|x| < 1$. לכן ע"י חיבור של $(*)$ עם $(**)$ נקבל שלכל $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n)x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2+x}{(1-x)^3} = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

בפרט אם נציב $x = \frac{1}{2}$ נקבל $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n}{2^n} = 8$.

4. נגדיר $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$ וקל לבדוק שלטור יש רדיוס התכנסות אחד. לכן ממשפט הגזירה איבר איבר נקבל שלכל $|x| < 1$ מתקיים

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)x^{2n}}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n-1)}$$

ע"י חילוק שני האגפים של המשוואה האחרונה ב־x וגזירת שני האגפים נקבל לכל $|x| < 1$ את הזהות

$$\left(\frac{S'(x)}{x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x^{2n-1})'}{(2n-1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}}{(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

ע"י אינטגרציה של שני האגפים של המשוואה האחרונה נקבל שלכל $|x| < 1$, $\frac{S'(x)}{x} = \arctan(x)$. ע"י הכפלה ב־$x$ ואינטגרציה נוספת נקבל

$$S(x) = \int_0^x S'(t)dt = \int_0^x t\arctan(t)dt = \frac{1}{2}\big((1+x^2)\arctan(x) - x\big)$$

וזהות זו נכונה לכל $|x| < 1$. עכשיו ניקח את הגבול $x \to 1^-$ בשני האגפים של המשוואה האחרונה

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} = S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x)$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2}\big((1+x^2)\arctan(x) - x\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

פיתוח פונקציות לטור טיילור

הגדרה: נאמר שהפונקציה f, המוגדרת בתחום A, ניתנת לפיתוח לטור טיילור סביב הנקודה $x = x_0$ אם קיים טור חזקות סביב $x = x_0$ המתכנס ל־f בתחום A.

משפט: תנאי הכרחי לפיתוח פונקציה f לטור חזקות בתחום A הוא ש־f גזירה אינסוף פעמים בכל נקודה ב־A.

משפט טיילור: תהי f פונקציה הגזירה אינסוף פעמים בתחום A. תהי $x_0 \in A$ ולכל n שלם נגדיר את השארית

$$R_n(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) - ... - \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

אז מתקיים השוויון $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ בתחום A אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ לכל $x \in A$.

טורי טיילור של פונקציות אלמנטריות:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ \ (|x| < \infty), \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \ (|x| < \infty)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \ \ (|x| < \infty), \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \ \ (-1 < x \le 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ \ (|x| < 1), \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \ \ (|x| < 1)$$

דוגמא: פתחו את $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ לטור טיילור סביב $x = 0$ וחשבו את $f^{(12)}(0)$.

פתרון: נשתמש בנוסחא של טור הנדסי

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} \ \ (|x| < 1).$$

ממשפט טיילור נקבל ש־$\frac{f^{12}(0)}{12!}$ הוא המקדם של x^{12} בטור שהוא -1. לכן $f^{12}(0) = -12!$.

דוגמא: פתחו את $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+3}$ לטור טיילור סביב $x = -1$.

פתרון:

$$\frac{1}{x^2+2x+3}=\frac{1}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^n\ \ \left(|x+1|<\sqrt{2}\right)$$

דוגמא: פתחו את $f(x)=\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ לטור טיילור סביב $x=0$ וחשבו $f^{(9)}(0)$.

פתרון: נתבונן בנגזרת של הפונקציה $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\ \ (|x|<1).$$

לכן ממשפט האינטגרציה איבר איבר נקבל שלכל $|x|<1$:

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

כיוון ש־$f(0)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$ נקבל

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\ \ (|x|<1)$$

כיוון שהמקדם של x^9 בפיתוח הוא $\frac{1}{9}$ נובע ש־ $\frac{f^{(9)}(0)}{9!}=\frac{1}{9}$ ולכן $f^{(9)}(0)=\frac{9!}{9}=8!$.

דוגמא: פתחו את $f(x)=\cos(x)$ לטור טיילור סביב $x=\frac{\pi}{4}$.

פתרון: נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ ונקבל

$$\cos(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} - \frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \ (|x| < \infty)$$