

תרגיל 8 בפונקציות מרוכבות

1. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{א})$$

פתרון: במקרה שלנו

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

ברור כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

ולכן

$$R = \frac{1}{1} = 1$$

זה עוד לא אומר לנו בדיוק מה תחום ההתכנסות כי צריך לבדוק את השפה. אם מספר מרוכב כך ש $|z-i|=1$ אז הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$$

בוודאי מתכנס כי הוא מתכנס בהחלט שהרי

$$\left| \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)} \right| = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$$

ולכן לסיכום תחום ההתכנסות הוא $E = \{z \mid |z-i| \leq 1\}$

$$z \neq 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n \quad (\text{ב})$$

פתרון: נציב $w = \frac{z+1}{z-1}$ ונקבל את טור החזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} w^n$$

נשים לב ש

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2 3^n}} = \frac{1}{3}$$

ולכן רדיוס ההתכנסות של הטור הוא

$$R = 3$$

שוב צריך לבדוק את השפה אבל שוב ברור שאם $|w| = 3$ אז הטור מתכנס בהחלט כי

$$\left| \frac{1}{n^2 3^n} w^n \right| = \frac{1}{n^2}$$

ולכן תחום ההתכנסות של הטור הזה הוא

$$\{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq 3\}$$

כדי למצוא את תחום ההתכנסות של הטור המקורי צריך לפתור את

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| \leq 3$$

כלומר

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right|^2 \leq 9$$

נכתוב $z = x + iy$ ואז

$$\frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} \leq 9$$

כלומר

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 \leq 9x^2 - 18x + 9 + 9y^2$$

$$8x^2 - 20x + 8 + 8y^2 \geq 0$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + y^2 \geq -1$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 \geq \frac{9}{16}$$

וקיבלנו שתחום ההתכנסות הוא המשלים של מעגל פתוח שרדיוסו $\frac{3}{4}$ ומרכזו ב $z = \frac{5}{4}$, מהמעגל הזה צריך להוציא את הנקודה $z = 1$ שמחוץ לתחום הגדרה בכלל.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(z^3 - i)^n \quad (\text{ג})$$

פתרון:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(z^3 - i)^n$$

היות ש

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

במקרה זה רדיוס ההתכנסות הוא $R = 0$ כלומר יש התכנסות רק עבור $w = 0$.
זה מתאים לערכי z עבורם

$$z^3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

כלומר

$$z = e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{9\pi}{6}}$$

נשים לב שהפתרון האחרון הוא למעשה

$$e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

2. מצאו את טור טיילור של הפונקציות הבאות:

(א) $z^2 \sin z$ סביב $z = 0$

פתרון: $z^2 \sin z$ סביב $z = 0$. היות שידוע ש

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ברור שהטור שאנחנו מחפשים הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+3}}{(2n+1)!}$$

(ב) $z^2 \sin z$ סביב $z = \frac{\pi}{2}$

פתרון: נציב $w = z - \frac{\pi}{2}$ כדי שהפיתוח יהיה סביב 0. הפונקציה הופכת להיות

$$\begin{aligned} \left(w + \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(w + \frac{\pi}{2}\right) &= \left(w + \frac{\pi}{2}\right)^2 \cos(w) \\ &= w^2 \cos(w) + \pi w \cos w + \frac{\pi^2}{4} \cos w \end{aligned}$$

היות שהפיתוח של $\cos w$ הוא

$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

נקבל שהטור המבוקש הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n+2}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \pi \frac{w^{2n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^2}{4} \frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

כלומר

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n}}{(2n-2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \pi \frac{w^{2n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^2}{4} \frac{w^{2n}}{(2n)!}$$

כלומר הטור הוא

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

כאשר

$$a_k = \begin{cases} \frac{\pi(-1)^n}{(2n)!} & k = 2n + 1 \\ (-1)^n \left(\frac{\pi^2}{4(2n)!} - \frac{1}{(2n-2)!} \right) & k = 2n \quad k \neq 0 \\ \frac{\pi^2}{4} & k = 0 \end{cases}$$

$z = 0$ סביב $\frac{z}{z^4+9}$ (ג)
פתרון: נשים לב ש

$$\frac{1}{9+z^4} = \frac{1}{9} \frac{1}{1 - (-\frac{z}{\sqrt{3}})^4} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^{4n} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{3})^n} z^{4n}$$

ולכן הטור שלנו הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9(\sqrt{3})^n} z^{4n+1}$$

$z = 1$ סביב $\frac{z}{(z+2)(z+3)}$ (ד)

פתרון: נפרק לפי שברים חלקיים. קל לראות ש

$$\frac{z}{(z+2)(z+3)} = \frac{-2}{z+2} + \frac{3}{z+3}$$

כעת,

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{z}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - (-\frac{z}{3})} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^n}$$

בדומה

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-\frac{z}{2})} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^n}$$

ולכן

$$\frac{-2}{z+2} + \frac{3}{z+3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n} \right) z^n$$

3. יהי $\sum a_n$ טור המתכנס בתנאי. הוכיחו כי רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum a_n z^n$ הוא 1.

פתרון: נסמן את רדיוס ההתכנסות ב R . היות ש $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אנחנו יודעים ש $\sum a_n z^n$ מתכנס עבור $z = 1$ ולכן רדיוס ההתכנסות הוא לפחות 1. מצד שני רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum |a_n| z^n$ הוא גם R והטור הזה דווקא מתבדר עבור $z = 1$ כלומר $R \leq 1$ ולכן לסיכום $R = 1$.

4. פתחו לטור טיילור סביב 0 את הפונקציה

$$f(z) = \int_0^z e^{w^2} dw$$

פתרון: הפיתוח של e^{w^2} לטור טיילור הוא כמובן

$$e^{w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n}}{n!}$$

ולכן לפי אינטגרציה איבר איבר

$$\begin{aligned} \int_0^z e^{w^2} dw &= \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n}}{n!} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z \frac{w^{2n}}{n!} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)n!} \Big|_0^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!} \end{aligned}$$

וזהו.

5. מצאו את המקסימום (איפה הוא מתקבל ומה הערך שלו) הגלובאלי של $\sin z$ במלבן $0 \leq x \leq \pi$ ו $0 \leq y \leq 1$ לפי עקרון המקסימום. המקסימום חייב להתקבל על השפה של התחום. במקרה שלנו השפה היא מלבן. נחפש נקודות חשודות על 4 הצלעות באמצעות כלים של אינפי ואז נשווה אותן כדי למצוא את המקסימום.

- על הקו בין 0 ל π מקבלים ערכים רגילים של \sin ממשי ולכן המקסימום מתקבל ב $z = \frac{\pi}{2}$.
- על הקו בין 0 ל i ערך הפונקציה הוא

$$\sin(iy) = i \sinh(y)$$

בערך מוחלט זה שווה ל

$$\sinh(y)$$

כידוע \sinh היא פונקציה מונוטונית עולה ולכן המקסימום על קו זה מתקבל ב $y = 1$ והוא

$$\sinh(1)$$

• על הקו בין π ל $\pi + i$ הפונקציה היא

$$\sin(\pi + iy) = -i \sinh(y)$$

שוב המקסימום יתקבל בקצה $z = \pi + i$ וערכו הוא

$$\sinh(1)$$

• על הקו בין i ל $\pi + i$ הפונקציה היא

$$\sin(x + i) = \sin x \cosh(1) + i \cos x \sinh(1)$$

כלומר אנחנו מחפשים מקסימום לפונקציה

$$\sin^2 x \cosh^2(1) + \cos^2 x \sinh^2(1) = \sinh^2(1) + \sin^2 x (\cosh^2(1) - \sinh^2(1))$$

נגזור ונקבל שהנקודות החשודות הן במקומות ש

$$2 \sin x \cos x = 0$$

$$z = i, i + \frac{\pi}{2}, i + \pi$$

לסיכום: קיבלנו בסך הכל 4 נקודות חשודות

$$\left\{ \frac{\pi}{2}, i, i + \frac{\pi}{2}, i + \pi \right\}$$

הערכים של $|\sin z|$ בנקודות אלה (לפי הסדר) הם:

$$1, \sinh(1), \cosh(1), \sinh(1)$$

הגדול מכולם הוא

$$\cosh(1) = \frac{e^1 + e^{-1}}{2}$$

והוא מתקבל כאמור בנקודה $z = i + \frac{\pi}{2}$ שהיא המקסימום הגלובאלי היחיד.