תרגיל 7

1. תהא $A \subsetneq \mathbb{R}$ קבוצה צפופה ב $\mathbb{R}$. הוכיחו כי A לא קשירה.
פתרון:
כיוון ש $A \neq \mathbb{R}$ אזי קיים $x \in \mathbb{R} \backslash A$. כעת נגדיר $V_1 = (x, \infty), V_2 = (-\infty, x)$ פתוחות ב $\mathbb{R}$ ולכן $A \cap V_i \neq \emptyset$ (לכל i) כי A צפופה. נקבל מכאן כי

$$A = [A \cap V_1] \uplus [A \cap V_2]$$

פירוק של A לאיחוד זר של קבוצות פתוחות (ב A) זרות לא ריקות. לכן A אינה קשירה.

2. יהי (X, τ) מ"ט. הוכיחו ש (X, τ) טריויאלי אמ"ם לכל $\emptyset \neq A \subseteq X$, A צפופה ב X.
פתרון:
$(\Rightarrow)$ צ"ל $\tau = \{\emptyset, X\}$. נניח בשלילה כי $\emptyset, X \neq O \in \tau$ אזי $O^c \neq \emptyset, X$ סגורה ולכן $cl(O^c) = O^c \neq X$ בסתירה לנתון.
$(\Leftarrow)$ צ"ל לכל $\emptyset \neq A \subseteq X$, A צפופה ב X. תהא $\emptyset \neq A \subseteq X$ כיוון שהנתון הוא ש $\tau = \{\emptyset, X\}$ הקבוצות הסגורות היחידות הן $\{\emptyset, X\}$ ולכן $cl(A) = X$. כלומר A צפופה.

3. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. עבור קבוצה $A \subseteq X$ נגדיר את הפונקציה $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ שנקראת הפונקציה האופיינית של A לפי

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

הוכיחו כי X קשירה אם ורק אם לכל $A \subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) הפונקציה χ_A אינה רציפה.

פתרון. X קשירה אם ורק אם אין $A \subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) שהיא סגוחה. לכן מספיק להראות ש χ_A רציפה אם ורק אם A סגוחה. אבל באמת, נניח ש A סגוחה ותהי $U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה אז

$$\chi_A^{-1}(U) \in \{\emptyset, A, A^c, X\}$$

ולכן χ_Aרציפה. מצד שני, אם χ_A רציפה אז

$$A = \chi_A^{-1}(\{1\})$$

$$A = \chi_A^{-1}((0.5, 1.5))$$

ולכן A גם פתוחה וגם סגורה.

4. האם המרחבים הבאים קשירים?

(א) $(\mathbb{R}\cup\{p\},\tau)$ כאשר $\tau=P(\mathbb{R})\cup\{O\subseteq\mathbb{R}\cup\{p\}:|O^c|<\aleph_0\}$.
פתרון:

לא קשיר. הקבוצה $\{1\}$ סגוחה, כי ניתן לראות שגם היא וגם המשלים פתוחות, לפי הגדרת הטופולוגיה.

(ב) $(\mathbb{N},\tau)$ כאשר $\tau=\{\emptyset,\mathbb{N},O_n\}\forall n$, $O_n=\{0,...,n\}$.
פתרון:

המרחב קשיר. אין קבוצה סגוחה לא טריוויאלית, כי כל קבוצה פתוחה שאינה ריקה חייבת להכיל את 0, ולכן לא תיתכן קבוצה פתוחה שאינה ריקה, שגם המשלימה שלה פתוחה.

(ג) $\mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה המושרית מהמטריקה הp- אדית.
פתרון:

המרחב אינו קשיר. הוכחנו בעבר שכל קבוצה מהצורה $p\mathbb{Z}$ היא סגוחה.

5. יהו $A,B\subseteq X$ קבוצות כך ש $A\cap B$ ו $A\cup B$ קשירים. הוכיחו שA,B קשירות.
פתרון:

לשם הפשטות נניח ש$A\cup B$ הוא כל המרחב שלנו. כלומר, $X=A\cup B$.

נניח בשלילה שA לא קשיר. אז יש פירוק לא טריוויאלי $A=O_1\cup O_2$ קבוצות פתוחות בA וזרות. מכיוון שA פתוחת הן פתוחות גם בX. נשים לב שמכיוון ש$A\cap B$ קשירה, אז היא בהכרח מוכלת באחת מהקבוצות. בה"כ, $A\cap B\subseteq O_1$. לכן B וO_2 הן קבוצות פתוחות לא ריקות וזרות שמכסות את X. בסתירה לכך שX קשיר. לכן Aקשיר. באופן זהה ניתן להוכיח שB קשיר.

6. מהם רכיבי הקשירות ב$\mathbb{Q}$ עם הטופולוגיה האוקלידית?
פתרון:

רק הנקודונים. הסבר: תהי $A\subseteq\mathbb{Q}$ קבוצה כך ש$|A|\geq 2$. נבחר $a<b\in A$. ידוע שקיים מס' אי רציונלי $a<r<b$. לכן $A=(A\cap(-\infty,r))\cup(A\cap(r,\infty))$ הוא פירוק לא טריוויאלי של A לקבוצות פתוחות.

7. (א) הוכיחו כי מרחב טופלוגי X הוא טריויאלי אם ורק אם יש לו בסיס בעל קבוצה אחת.

פתרון. אם המרחב X טריויאלי אז X היא הקבוצה הפתוחה הלא ריקה היחידה ולכן בוודאי ש $\mathcal{B}=\{X\}$ בסיס. מצד שני נניח ש $\mathcal{B}=\{B\}$ בסיס של X. X בעצמה קבוצה פתוחה וצריכה להיות איחוד של אברים מהבסיס ולכן בהכרח $B=X$. לכן אין עוד קבוצות פתוחות חוץ מ X וזו טופולוגיה טריויאלית.

(ב) יהי X מרחב דיסקרטי, הוכיחו כי קבוצה של קבוצות פתוחות (שזו בעצם סתם קבוצה של קבוצות) היא בסיס אם ורק אם היא מכילה את כל היחידונים (הקבוצות בגודל 1)

פתרון. יהי $\mathcal{B}$ בסיס של מרחב דיסקרטי. כל יחידון $\{x\}$ הוא קבוצה פתוחה ולכן אמור להיות איחוד של אברים מהבסיס. אבל אם B קבוצה לא ריקה המקיימת $B\subseteq\{x\}$ אז בהכרח $B=\{x\}$ ולכן כל היחידונים הם איברים בבסיס. מצד שני נניח שכל היחידונים הם אברים ב $\mathcal{B}$, אז בוודאי כל קבוצה היא איחוד של קבוצות מגודל 1 ולכן כל קבוצה היא איחוד של אברים מ $\mathcal{B}$ ולכן זה באמת בסיס.

8. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי B_2, הוכיחו כי $|\tau|\leq\aleph=2^{\aleph_0}$.

פתרון. יש ל X בסיס בן מניה $\mathcal{B}=\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$. כל קבוצה פתוחה P אפשר לכתוב כאיחוד של איברים מהבסיס.

$$O=\bigcup_{i\in I_P} B_i$$

כאשר $I_O\subseteq\mathbb{N}$. (כמובן, הבחירה של קבוצת האינדקסים I_O לא יחידה אבל אפשר לבחור קבוצה כלשהיא) נגדיר פונקציה

$$f:\tau\to P(\mathbb{N})$$

(כאן $P(\mathbb{N})$ זאת קבוצת החזקה) לפי

$$f(O)=I_O$$

נשים לב ש f חד חד ערכית כי אם

$$f(O_1)=f(O_2)$$

כלומר

$$I_{O_1}=I_{O_2}$$

אז

$$O_1=\bigcup_{i\in I_{O_1}} B_i=\bigcup_{i\in I_{O_2}} B_i=O_2$$

ולכן העוצמות מקיימות ש

$$|\tau|\le|P(\mathbb{N})|=\aleph$$

כנדרש.

9. תהי X קבוצה לא בת מניה עם טופולוגיה קו-מנייתית (cocountable).כלומרת הקבוצות הפתוחות הן קבוצה ריקה, וקבוצות שהמשלים שלהן הוא בן מניה. האם מרחב זה הוא B_2?

פתרון. פתרון:

נוכיח ש(X,τ) אינו ספרבילי, ולכן אינו B_2. נניח בשלילה ש X ספרבילית אז יש קבוצה בת מניה A שהיא צפופה, כלומר $cl(A)=X$. אבל A בת מניה ולכן סגורה, כי המשלימה שלה פתוחה. ולכן $cl(A)=A$. קיבלנו $A=X$ בסתירה לכך ש X לא בת מניה.

10. (א) יהי X מרחב B_2. הראו כי לכל כיסוי כלשהוא של קבוצות פתוחות יש תת כיסוי בן מניה. (תכונה זאת נקראת תכונת לינדולף).כלומר, אם יש אוסף $\mathcal{U}$ של קבוצות פתוחות כך ש$X=\bigcup_{U_i\in\mathcal{U}} U_i$, אז יש תת קבוצה בת מניה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ כך ש$X=\bigcup_{U_i\in\mathcal{O}} U_i$.

פתרון. יהי $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ כיסוי של קבוצות פתוחות ויהי $\mathcal{B}$ בסיס בן מניה. לכל $x\in U$, קיים $B_x\in\mathcal{B}$ כך ש $x\in B_x\subseteq U$ (לפי הגדרת בסיס). ברור ש $\{B_x\}_{x\in X}$ הינו כיסוי עבור X. למרות ש X יכולה להיות לא בת מניה, הכיסוי הזה חייב להיות

בן מניה כי הוא מכיל רק אברים מ $\mathcal{B}$שהיא קבוצה בת מניה. לכן קיימת איזה קבוצה בת מניה $Y \subseteq X$ כך ש $\{B_y\}_{y\in Y}$ הוא גם כיסוי עבור X. כעת, לפי הבניה שלנו, ניתן לראות שלכל $y \in Y$ יש איזה $U \in \mathcal{U}$ כך ש $B_y \subseteq U$. יכולות להיות כמה קבוצות כאלה, אבל יש לפחות אחת. נבחר אחת מהן ונסמן אותה U_y. כעת האוסף $\{U_y\}_{y\in Y}$ שהוא תת קבוצה של $\mathcal{U}$ הוא וודאי בן מניה (מאונדקס ע"י Y שהיא קבוצה בת מניה) והוא מכסה את X כי

$$X = \bigcup_{x\in X} B_X \subseteq \bigcup_{x\in X} U_X$$

ולכן זה תת כיסוי בן מניה כנדרש.

(ב) יהי X מרחב B_2. הראו שלכל בסיס $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ יש תת קבוצה בת מניה שהיא גם בסיס.

פתרון. יהי $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ בסיס בן מניה של X. היות שגם $\mathcal{B}$ בסיס. כל C_i הוא איחוד איברים מ $\mathcal{B}$. נניח שלכל $i \in \mathbb{N}$ יש קבוצת אינדקסים J_i כך ש

$$\bigcup_{j\in J_i} B_j = C_i$$

לפי שאלה 4 C_i עצמו הוא גם מרחב מניה שניה בתור תת מרחב. לכן, לפי הסעיף הקודם, לכל כיסוי יש תת כיסוי בן מניה. לכן יש קבוצת אינדקסים בת מניה

$$K_i \subseteq J_i$$

כך ש

$$\bigcup_{j\in K_i} B_j = C_i$$

נשים לב ש $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ היא קבוצה בת מניה בתור איחוד בן מניה של בנות מניה. לכן הקבוצה $\{B_j \mid j \in \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\}$ היא גם בת מניה. אבל קבוצה זו היא גם בסיס כי כל איבר מהבסיס C_i הוא איחוד של איברים מקבוצה זו. ובזה סיימנו.