

ב"א אנליזה 1 תשפ מועד א

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \tan(x)}{1 - \cos(x)} \quad (\text{א})$$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבולות ידועים

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x) \cdot \frac{\sin(x) \tan(x)}{1 - \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\tan(x)}{x} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos(x)} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \ln(x)^{\frac{1}{x-e}} \quad (\text{ב})$$

פתרון: נשתמש בכלל e מכיוון ש $\lim_{x \rightarrow e} \ln(x) = 1$ לחשב:

$$\lim_{x \rightarrow e} \ln(x)^{\frac{1}{x-e}} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow e} (\ln(x) - 1) \cdot \frac{1}{x-e} \right)} = e^{\left(\frac{1}{e} \right)}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מ:

$$\lim_{x \rightarrow e} (\ln(x) - 1) \cdot \frac{1}{x-e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x) - 1}{x-e} \stackrel{\frac{0}{0}, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n + 1} \quad (\text{ג})$$

פתרון: נראה כי $\frac{n^3}{2^n} \rightarrow 0$ ואז

$$\frac{n^3}{2^n + 1} = \frac{n^3}{2^n} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)} = \frac{n^3}{2^n} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^3}{2^n}\right)} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{(1+0)} = 0$$

אכן: נשתמש בכלל המנה ונגדיר $a_n = \frac{n^3}{2^n}$ ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^3} = \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1^3 = \frac{1}{2}$$

וכיוון ש $\frac{1}{2} < 1$ נקבל ש $\lim a_n = 0$

2. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x = 0$?
פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x = 0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} = a$$

לכל a , מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} \stackrel{\frac{0}{0}, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

ולכן רק עבור $a = 1$ מתקיים השוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?
פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a = 1$ (שזה המקרה היחיד בו רציפה ב $x = 0$) אם f גזירה ב $x = 0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{\sin(x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{x \cdot \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin(x)} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x)}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin(x)}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}$$

ולכן f גזירה ב $x = 0$ ומתקיים $f'(0) = \frac{1}{2}$.

3. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ לכל n טבעי.

(א) הוכיחו כי הסדרה a_n עולה.

פתרון: לכל n טבעי מתקיים $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ ולכן

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2 \geq 0$$

ולכן $a_{n+1} \geq a_n$

(ב) נתון בנוסף כי הסדרה מתכנסת לגבול סופי, הוכיחו כי $a_1 \leq 1$.

פתרון: כיוון שהסדרה עולה וגבולה סופי אזי הסדרה חסומה. נסמן את הגבול ב L , כלומר $a_n \rightarrow L$ ואז גם $a_{n+1} \rightarrow L$

ומהגדרת הסדרה נקבל

$$L \leftarrow a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \rightarrow L^2 - L + 1$$

ולכן $L = L^2 - L + 1$. בדומה למקודם נקבל ש $L^2 - 2L + 1 = 0$ ויש פתרון יחיד לשיוויון שהוא $L = 1$. כיוון שהגבול של סדרה עולה חוסם אותה מלמעלה נקבל שלכל n מתקיים $a_n \leq L = 1$ ובפרט $a_1 \leq 1$ כנדרש.

4. יהא קבוע $a \in \mathbb{R}$

$$(א) \text{ מצאו כמה פתרונות יש למשוואה } x \cdot e^{(x^2)} = a$$

פתרון: נגדיר פונקציה

$$f(x) = x \cdot e^{(x^2)} - a$$

ונשאל שאלה שקולה: לכל ערך של a , כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x) = e^{(x^2)} + x \cdot 2xe^{(x^2)} = e^{(x^2)} (1 + 2x^2 \cdot e)$$

ולכן, ההנגזרת תמיד חיובית (ושונה מאפס). מכאן ש $f(x)$ עולה ממש ולכן יש לה לכל היותר שורש אחד. בנוסף:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{(x^2)} - a = \{\infty \cdot \infty - a\} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{(x^2)} - a = \{-\infty \cdot \infty - a\} = -\infty$$

ולכן קיימים c, d ממשיים כך ש $f(c) < 0$ ו $f(d) > 0$. בקטע $[c, d]$ הפונקציה f רציפה ומחליפה סימן ולכן לפי משפט ערך הביניים יש לה שם שורש. לסיכום: ל f יש לכל היותר שורש ויש לה שורש ולכן יש לה בדיוק שורש אחד.

$$(ב) \text{ מצאו כמה פתרונות יש למשוואה } e^{(x^2)} = 2e \cdot x$$

פתרון: באופן שקול נבדוק כמה פתרונות יש למשוואה $e \cdot x = \frac{e^{(x^2)}}{2}$. נגדיר פונקציה

$$f(x) = \frac{e^{(x^2)}}{2} - e \cdot x$$

ונשאל שאלה שקולה: כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x) = xe^{(x^2)} - e$$

וראינו בסעיף קודם של $f'(x)$ יש נקודה יחידה בה היא מתאפסת (אם ניקח בסעיף הקודם $a = e$). קל לראות ש $f(1) = 0$ ולכן נוכל להעזר בטבלה

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+

להסיק כי f יורדת עד 1 ועולה מ 1 ולכן 1 נקודת מינימום. הערך בנקודה זו היא $f(1) = \frac{e}{2} - e < 0$. בנוסף $f(0) = \frac{1}{2} > 0$ ו $f(2) = \frac{e^4}{2} - 2e > \frac{2^4}{2} - 2 \cdot 3 = 8 - 6 > 0$ ולכן בקטע $[1, 2]$ ובקטע $[0, 1]$ הפונקציה f מחליפה סימן. כיוון ש f רציפה בקטעים אלו, לפי משפט ערך הביניים היא מתאפסת שמה. כיוון f לא מתאפסת בקצוות הקטעים נקבל שהיא מתאפסת בקטע $(1, 2)$ וב $(0, 1)$ ולכן אלו שתי נקודות שונות. מכיוון שראינו ש f עולה מ 1 כלומר בקטע $(1, \infty)$ היא מתאפסת שמה פעם אחת לכל היותר ומכיוון שראינו שהיא מתאפסת שמה - היא מתאפסת שמה בדיוק פעם אחת. באופן דומה, היא מתאפסת ב $(-\infty, 1)$ פעם אחת בדיוק. לכן בסה"כ f מתאפסת פעמיים בדיוק.

5. תהיה f פונקציה המוגדרת בקטע A ותהי $a \in A$ נקודה בקטע. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) אם $f'(a) = 0$ ו $f''(x) > 0$ בקטע אזי $x = a$ היא נקודת מינימום של f .
פתרון: מכיוון ש $f''(x)$ חיובית בקטע אזי $f'(x)$ עולה בקטע. מכיוון ש $f'(a) = 0$ נקבל שמשמאלה $f' < 0$ ומימינה $f' > 0$. מכאן ש f משמאל ל a יורדת ומימין ל a עולה ולכן a נקודת מינימום של f .

(ב) אם $f'(a) = f''(a) = f'''(a) = 0$ ו $f''''(x) > 0$ בקטע אזי $x = a$ היא נקודת מינימום של f .
פתרון: לפי טעיף קודם נקבל ש a נקודת מינימום של f'' (שהרי $f''(a) = f'''(a) = 0$) ו $f''''(x) = f''''(x)$ חיובית בקטע.

מכיוון ש $f''(a) = 0$ נקבל שמשמאלה $f'' < 0$ ומימינה $f'' > 0$. מכאן ש f' משמאל ל a יורדת ומימין ל a עולה ולכן a נקודת מינימום של f' . ושוב באותו טיעון:

מכיוון ש $f'(a) = 0$ נקבל שמשמאלה $f' < 0$ ומימינה $f' > 0$. מכאן ש f משמאל ל a יורדת ומימין ל a עולה ולכן a נקודת מינימום של f .