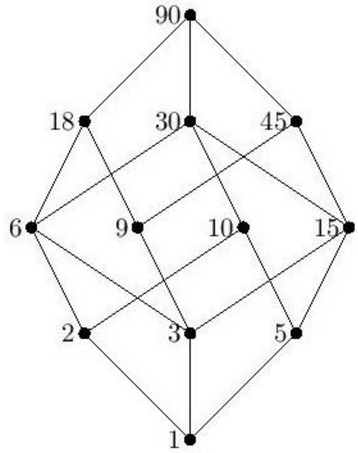
מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

שיעורי בית מספר 6

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדבח

1. ציירו את דיאגרמת הסה של שריג המחלקים של 90.



2. ניזכר בהגדרת יחס השקילות $R_B := \{(C_1,C_2) : C_1 \cap B = C_2 \cap B\}$.
תהי A קבוצה, נגדיר: $X := \{R_B : B \subseteq A\}$.
נגדיר על X את יחס הסדר הכלה, כלומר נביט בקס"ח $(X,\subseteq)$.
הוכיחו: X הוא שריג (רמז: היעזרו בתרגיל המודרך, תרגיל 5).

3. נגדיר את הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ על פי: $f(n) := \max\{m : 2^m \mid n\}$ (לדוגמה, $f(3)=0,\ f(6)=1$). ונגדיר את היחס $\preceq$ על $\mathbb{N}$ באופן הבא: $a \preceq b$ אמ"ם $f(a) \le f(b)$.

א. הוכיחו: $\preceq$ הוא קדם- סדר.

קדם סדר הוא סדר רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

$\preceq$ רפלקסיבי כי $(\mathbb{N},\le)$ רפלקסיבי.

$\preceq$ טרנזיטיבי כי אם $a \preceq b$ וגם $b \preceq c$ אז $a = 2^{k_1}\cdot m_1,\ b = 2^{k_1}2^{k_2}\cdot m_2, c = 2^{k_1}2^{k_2}2^{k_3}\cdot m_3$ כאשר $m_i \ge 0$ אי זוגיים ו- $k_i \ge 0$ שלמים, לכן $f(a) = k_1 \le k_1 + k_2 + k_3 = f(c)$ ו- $a \preceq c$.

כעת נגדיר על $\mathbb{N}$ את יחס השקילות: $a \approx_{\preceq} b$ אמ"ם $a \preceq b$ וגם $b \preceq a$. בתרגול ראינו שהיחס $\preceq^{\approx_{\preceq}}$ המושרה על ידי $\preceq$ על מחלקות השקילות $\mathbb{N}/\approx_{\preceq}$ הוא יחס סדר חלקי.

ב. הוכיחו כי $\preceq^{\approx_{\preceq}}$ הוא יחס סדר לינארי על $\mathbb{N}/\approx_{\preceq}$.

מכיוון ש-$(\mathbb{N},\le)$ סדר לינארי כל שתי מחלקות ב- $\mathbb{N}/\approx_{\preceq}$ ניתנות להשוואה.

ג. מצאו את הסופרימום והאינפימום (אם קיימים, אחרת ציינו שלא) של תת הקבוצות הבאות של $\mathbb{N}/\approx_{\preceq}$ עם יחס הסדר $\preceq^{\approx_{\preceq}}$:

1) $\{[a]_{\approx_{\preceq}} : f(a)\ \text{is prime}\}$.

האינפימום: $\left[2^2\right]_{\approx_{\preceq}}$

אין בקבוצה סופרימום, כי לכל חזקה ראשונית p של 2 קיימת מחלקה ייחודית כך ש- 2^p נציג שלה, וקיים $p>q$ ראשוני כך ש- $\left[2^q\right]_{\approx_{\preceq}} \neq \left[2^p\right]_{\approx_{\preceq}}$ ו- $\left[2^q\right]_{\approx_{\preceq}} \preceq \left[2^p\right]_{\approx_{\preceq}}$.

2) $\left\{[a]_{\approx_{\preceq}} : f(a)<10\right\}$.

האינפימום: $\left[2^0\right]_{\approx_{\preceq}}$

הסופרימום: $\left[2^9\right]_{\approx_{\preceq}}$

4. ציינו והוכיחו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם חח"ע ו/או על:

א. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\cup\{0\},\ f(n)=|n|$.

על אבל אינה חח"ע.

ב. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$.

חח"ע ועל.

ג. $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x$.

חח"ע ואינה על.

5. תהיינה A,B,C,D קבוצות ו- $f:A\to B,\ g:B\to C,\ h:C\to D$ פונקציות. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $h\circ g\circ f$ הפיכה, אז g חח"ע או g על.

הפרכה (נסו דוגמאות סופיות).

ב. אם $h\circ g\circ f$ חח"ע ו- $h\circ g$ חח"ע, אז $g\circ f$ חח"ע.

הוכחה. שימו לב ש- $h\circ g\circ f=h\circ\left(g\circ f\right)$ גורר מיידית ש- $g\circ f$ חח"ע.

ג. אם $h\circ g\circ f$ על ו- $h\circ g$ על, אז $g\circ f$ על.

הפרכה (נסו דוגמאות סופיות).

ד. אם $h\circ g\circ f$ על ו- $g\circ f$ על, אז $h\circ g$ על.

הוכחה. שימו לב ש- $h\circ g\circ f=\left(h\circ g\right)\circ f$ גורר מיידית ש- $h\circ g$ על.

ה. אם $g\circ f$ הפיכה ו- $h\circ g$ הפיכה, אז g הפיכה.

הוכחה. מכך ש- $g\circ f$ הפיכה נובע ש- g על מכך ש- $h\circ g$ הפיכה נובע ש- g חח"ע.

ו. אם $g\circ f$ הפיכה ו- $h\circ g$ הפיכה, אז $h\circ g\circ f$ הפיכה.

הוכחה. נשים לב שמהנתון g הפיכה, f חח"ע ו- h על.

$g\circ f$ הפיכה (לכן על), ו- g הפיכה (לכן חח"ע) לכן f על (ראה תרגיל זה בתרגול).

בדומה:

$h\circ g$ הפיכה (לכן חח"ע), ו- g הפיכה (לכן על) לכן h חח"ע (ראה תרגיל זה בתרגול).

לכן $h\circ g\circ f$ הפיכה כהרכבה של שלוש פונקציות הפיכות.

6. תהי $f:A\to B$ פונקציה.

א. הוכיחו: אם $C\subseteq A$ אזי $C\supseteq\left(\text{"}f\text{"}(C)\right)\text{"}f^{-1}\text{"}$.

יהי $c\in C$. אזי $f(c)\in "f"(C)$ ולכן, $c\in "f^{-1}"("f"(C))$ לפי ההגדרה של תמונה הפוכה.

ב. תנו דוגמה לפונקציה $f:A\to B$ ו- $C\subseteq A$ כך שההכלה בסעיף א' היא הכלה ממש.

למשל: $A,B=\mathbb{R}$. נבחר $f(x)=|x|$ ו- $C=\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$. מתקיים $C\subset "f^{-1}"("f"(C))=\mathbb{R}$.

ג. הוכיחו כי בסעיף א' מתקיים שוויון לכל $C\subseteq A$ אמ"מ f חח"ע.

נתון שלכל $C\subseteq A$ מתקיים $"f^{-1}"("f"(C))=C$ ובפרט לכל סינגלטון $\{x\}\subseteq A$ מתקיים $"f^{-1}"("f"(\{x\}))=\{x\}$. לכן אם נניח בשלילה שקיימים $x\neq y$ כך ש- $f(x)=f(y)$ אז $"f^{-1}"("f"(\{x\}))=\{x,y\}$ בסתירה להנחה.

אם f חח"ע, מספיק להוכיח שלכל $C\subseteq A$ מתקיים $"f^{-1}"("f"(C))\subseteq C$.

נניח בשלילה שאין הכלה, כלומר, קיים x כך ש:

$$x\notin C\wedge x\in "f^{-1}"("f"(C))\Leftrightarrow$$

$$x\notin C\wedge f(x)\in f(C)\Leftrightarrow$$

$$x\notin C\wedge \exists y\in C(f(x)=f(y))$$

סתירה.

ד. הוכיחו: אם $D\subseteq B$, אזי $"f^{-1}"("f"("f^{-1}"(D)))="f^{-1}"(D)$.

על פי סעיף א' מספיק להוכיח ש- $"f^{-1}"("f"("f^{-1}"(D)))\subseteq "f^{-1}"(D)$,

אבל אם $x\in "f^{-1}"("f"("f^{-1}"(D)))$ לכן $f(x)\in "f"("f^{-1}"(D))$

ו- $"f"("f^{-1}"(D))\subseteq D$ לכן $f(x)\in D$ וקיבלנו כדרוש ש- $x\in "f^{-1}"(D)$.

7. תהי $f:A\to B$. נגדיר $g:P(B)\to P(A)$ לפי: $g(X)="f^{-1}"(X)$. הוכיחו: f חח"ע אמ"מ g על.

אם f חח"ע אז לכל $X\in P(A)$, $"f"(X)\in P(B)$ ו- $g(f(X))=f^{-1}(f(X))=X$ על פי סעיף ג' של שאלה 6, כלומר, g על.

אם g על, נניח בשלילה ש- f אינה חח"ע, לכן קיימים $x_1\neq x_2$ ב- A כך ש- $f(x_1)=f(x_2)=y'$.

כעת, g על, לכן לכל $Y\in P(A)$ קיים מקור $U\in P(B)$ כך ש- $g(U)=Y$.

אבל $x_1\in Y$ אמ"מ $y'\in U$ אמ"מ $x_2\in Y$. עבור $Y=\{x_1\}$ יתקיים $x_2\in\{x_1\}$ ולכן $x_2=x_1$ בסתירה להנחת השלילה.