תרגיל 3

להגשה עד 27.11.17

שאלה 1

נגדיר $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$.F\left(x\right):=\begin{cases}21 & x\geq4\\ 2x+5 & 0\leq x<4\\ 3e^{x}+1 & x<0\end{cases}$$

נסמן ב μ_F את מידת סטילטיס המוגדרת ביחס לפונקציה F.

1. חשבו את מידת סטילטיס ביחס ל F של הקבוצות הבאות:
   (א) $I_1=(3,\infty)$.
   (ב) $I_2=\left(\frac{1}{4},2\right)$.
   (ג) $I_3=[-1,0]$.
   (ד) $I_4=\{-2,0,4,6\}$
2. נתבונן בתתי הקבוצות של $[5,\infty)$. מי מהן מדידה־μ_F?
3. תהי $A\subseteq(-\infty,0)$. הוכיחו כי A מדידה־μ_F אם ורק אם היא מדידה לבג.

שאלה 2

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה חיובית, ותהי Y קבוצה לא ריקה. נתונה פונקציה $f:X\to Y$.

1. נגדיר: $\mathcal{B}_f:=\left\{F\subseteq Y\ :\ f^{-1}(F)\in\mathcal{A}\right\}$. הוכיחו כי $(Y,\mathcal{B}_f)$ הינו מרחב מדיד.
2. לכל קבוצה $E\subseteq Y$ ששייכת ל $\mathcal{B}_f$, נגדיר: $\nu(E):=\mu(f^{-1}(E))$. הוכיחו כי $(Y,\mathcal{B}_f,\nu)$ הינו מרחב מידה חיובית.
   הערה: $(Y,\mathcal{B}_f,\nu)$ נקרא מרחב המידה המושרה מ $(X,\mathcal{A},\mu)$ על ידי f
3. תהי $S\in\mathcal{A}$. לכל $F\in\mathcal{A}$ נגדיר $\nu(F):=\mu(F\cap S)$. הסיקו מהנ"ל כי $(X,\mathcal{A},\nu)$ הינו מרחב מידה חיובית.

שאלה 3 ־ רציפות המידה.

יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה חיובית. ותהי (E_n) סדרת קבוצות ב $\mathcal{A}$.
נגדיר: $\liminf E_n:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n}E_k$,
וכן: $\limsup E_n:=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n}E_k$.

הוכיחו כי:

1. $\mu(\liminf E_n)\leq\liminf\mu(E_n)$.
2. אם קיים n_0 כך ש־ $\mu(\bigcup_{k\geq n_0}E_k)<\infty$, אזי: $\limsup\mu(E_n)\leq\mu(\limsup E_n)$.

בהנאה :)