לינארית להנדסה- תרגיל 10

תרגיל 1.

1. יהי $B=\{v_1,\dots v_n\}$ קבוצה בת"ל ו-$v_{n+1}\notin Span\{B\}$ הוכיחו ש-$B'=B\bigcup\{v_{n+1}\}$ בת"ל
2. יהי $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ קבוצה בת"ל השלימו את B לבסיס ל-$\mathbb{R}^4$

תרגיל 2. הוכח\הפרך: יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ אז

$$rank\left(A+B\right)\leq rank\left(A\right)+rank\left(B\right)$$

תרגיל 3. תהי מטריצה $A\in M_{4\times 8}\left(\mathbb{R}\right)$ כך ש-$Rank\left(A\right)=4$

1. האם שורות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?
2. האם עמודות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?
3. למה שווה $dim\left(N\left(A\right)\right)$?

תרגיל 4. הפוך את הקבוצה $\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ לקבוצה אורתונורמלית.

תרגיל 5. הוכיחו ש-$\langle A,B\rangle=tr\left(AB^t\right)$ היא מכפלה פנימית מעל $V=\mathbb{R}^{n\times n}$

תרגיל 6. הוכיחו שמתקיים $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$.
שוויון זה נקרא כלל המקבילית כי מבחינה גאומטרית הוא הקובע שבמקבילית סכום ריבועי ארבע צלעות שווה לסכום ריבועי האלכסונים.

תרגיל 7. יהא V מעל $\mathbb{F}$ ממ"פ עם מ"פ $\langle v,u\rangle$.

1. הוכיחו כמעט לינארית ברכיב שני. כלמר הוכיחו כי $\langle v,\alpha u+w\rangle=\bar{\alpha}\langle v,u\rangle+\langle v,w\rangle$ (לכל $v,u,w\in V$ ולכל α סקלאר)
2. יהא $B=\{v_1,\dots v_n\}$ בסיס. יהא $v\in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i,v\rangle=0$. הוכח כי $v=0$
3. יהא $B=\{v_1,\dots v_n\}$ בסיס. יהיו $v,u\in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i,v\rangle=\langle v_i,u\rangle$. הוכח כי $v=u$
4. לכל $\alpha\in\mathbb{R}_{>0}$ נגדיר פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha:V\times V\to\mathbb{F}$ ע"י $\langle v,v'\rangle_\alpha=\alpha\cdot\langle v,v'\rangle$. הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha$ גם כן מ"פ על V.

תרגיל 8. נגדיר $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ כך

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2x+y+3z$$

ונגדיר קבוצה $S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\right\}=\left\{v\in\mathbb{R}^3 : \|v\|=1\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$ (כאשר $\|v\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית). מצאו

$$\max_{v\in S} f(v)$$

כלומר את הערך המקס' ש f מקבלת עבור קלטים מ S. [רמז: אי שיוויון קושי שוורץ, שימו לב כי $f(v)=\left\langle v,\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle$]

תרגיל 9. תהי $S=\{v_1,\ldots,v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית ב-V הוכח שלכל $v\in V$ מתקיים $v-\sum_{i=1}^{k}\langle v,v_i\rangle v_i\in S^{\perp}$

בהצלחה!!