

פיסיקה למתמטיקאים

מטוטלת קפיץ

1. קפיץ בעל קבוע k ואורך שווי משקל ℓ מחובר בקצהו לתקרה. מסה m מחוברת לקפיץ בקצהו השני. המסה נעה גם בהשפעת כוח הכובד, וע"י כך יוצרת מטוטלת.

(א) רשמו את הלגראנג'יאן

תהי x התזוזה של המסה מנקודת שווי המשקל ו θ זווית הנטייה של המטוטלת. אזי האנרגיה הקינטית היא $T = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + (\ell + x)^2\dot{\theta}^2)$ והפוטנציאל נתון ע"י $V = -mg(\ell + x)\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2$. לכן

$$(1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + (\ell + x)^2\dot{\theta}^2) + mg(\ell + x)\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2.$$

(ב) רשמו את משוואות התנועה

משוואת התנועה עבור x

$$(2) \quad m\ddot{x} = m(\ell + x)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kx,$$

ועבור θ

$$(3) \quad 2m\dot{x}\dot{\theta} + m(\ell + x)\ddot{\theta} = -mg\sin\theta.$$

(ג) רשמו את משוואות התנועה בקרוב תנודות קטנות ותחת ההנחה כי $x \ll \ell$.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g, \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \theta = -2\dot{x}\dot{\theta}/\ell, \quad (5)$$

¹ כאשר $\omega^2 = k/m$ ו $\Omega^2 = g/\ell$. מהצבת פתרון משוואה (4) $x = x_0 \cos(\omega t + \varphi) + g/\omega^2$ במשוואה (5) נקבל

$$(6) \quad \ddot{\theta} - \beta \sin(\omega t + \varphi)\dot{\theta} + \Omega^2 \theta = 0,$$

כאשר $\beta = 2\omega x_0/\ell$. עבור $\Omega \ll 1$ ו $\ell \gg 1$, ניתן להזניח את האיבר $\Omega^2 \theta$ במשוואה (6). אזי פתרון המשוואה נתון ע"י

$$(7) \quad \theta = \int_0^t A e^{\frac{\beta}{\omega} \sin(\omega s + \varphi)} ds.$$

כלומר, הקפיץ והמטוטלת מחליפים אנרגיה בזמן התנועה.

¹ אם $x \sim \theta$ ניתן להזניח את האיבר $\dot{x}\dot{\theta}$ במשוואה (5) ואז אין צימוד בין שני האוסילטורים.