ב"א אנליזה 2 תשעח מועד ב

1. חשבו את:

(א) $\int\left(e^{x}+x\right)^{2}\left(e^{x}+1\right)\mathrm{d}x$.
פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\int\left(e^{x}+x\right)^{2}\left(e^{x}+1\right)\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c}t=e^{x}+x\\ \mathrm{d}t=e^{x}+1\mathrm{d}x\end{array}\right\}=\int t^{2}\mathrm{d}t=\frac{t^{3}}{3}+C=\frac{\left(e^{x}+x\right)^{3}}{3}+C$$

(ב) $\int x^{2}\sin\left(2x\right)\mathrm{d}x$.
פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned}\int x^{2}\sin\left(2x\right)\mathrm{d}x&=\left\{\begin{array}{cc}f=x^{2} & f'=2x\\ g'=\sin(2x) & g=\frac{-\cos(2x)}{2}\end{array}\right\}=\\ &=\frac{-x^{2}\cos(2x)}{2}-\int\frac{-\cos(2x)}{2}\cdot2x\mathrm{d}x\\ &=\frac{-x^{2}\cos(2x)}{2}+\int x\cos(2x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ונשתמש שוב באינטגרציה בחלקים לחשב $\int x\cos(2x)\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int x\cos(2x)\mathrm{d}x&=\left\{\begin{array}{cc}f=x & f'=1\\ g'=\cos(2x) & g=\frac{\sin(2x)}{2}\end{array}\right\}=\\ &=\frac{x\sin(2x)}{2}-\int\frac{\sin(2x)}{2}\mathrm{d}x\\ &=\frac{x\sin(2x)}{2}-\frac{-\cos(2x)}{4}+C\end{aligned}$$

ולכן התשובה הסופית היא

$$\int x^{2}\sin\left(2x\right)\mathrm{d}x=\frac{-x^{2}\cos(2x)}{2}+\int x\cos(2x)\mathrm{d}x=\frac{-x^{2}\cos(2x)}{2}+\frac{x\sin(2x)}{2}+\frac{\cos(2x)}{4}+C$$

2.

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=\frac{x^{2}}{x+1}$.
פתרון: אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה לא מוגדרת ב $x=-1$, נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^{2}}{x+1}=\{\frac{1}{0}\}=\pm\infty$$

כאשר מצד ימין ∞ ומצד שמאל $-\infty$ ולכן יש אסימפטוטה אנכית ב $x=-1$.

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1$$

ו

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}=-1$$

ולכן $y=x-1$ אסימפטוטה משופעת מימין.

אסימפטוטה משופעת משמאל: נחשב את הגבול

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}=1$$

ו

$$b=\lim_{x\to-\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x+1}=-1$$

ולכן $y=x-1$ אסימפטוטה משופעת משמאל.

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sin(x)}\mathrm{d}x$.

פתרון: הנקודה הבעייתית היחידה היא ∞ שהרי ב $x=1$ הפונקציה לא מתאפסת כי $\sin(1)$ ואחרי 1 מתקיים ש $x^2+\sin(x)\neq 0$ בגלל ש $\sin$ חסומה ע"י 1. נראה שהאינטגרל שלנו חבר של האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ שמתכנס ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס. הפונקציות $\frac{1}{x^2+\sin(x)}$ ו $\frac{1}{x^2}$ חיוביות בתחום $[1,\infty)$ ואפשר להשתמש במבחן הגבול לפונקציות חיוביות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2+\sin(x)}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+\sin(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\sin(x)}{x^2}}=\frac{1}{1+0}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\sin(x)=\{0\cdot \text{חסומה}\}=0$. וקיבלנו שהאינטגרלים חברים (קיבלנו מספר סופי שונה מאפס).

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\int_{-x}^{x^2}\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{x^2}.$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to 0}\int_{-x}^{x^2}\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t=0$ (כיוון ש $\cos\left(t^2\right)$ רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\int_{-x}^{x^2}\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{x^2}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[2x\cos\left(x^4\right)-(-1)\cos\left(\left(-x\right)^2\right)\right]}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[2x\cos\left(x^4\right)+\cos\left(x^2\right)\right]}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x^2\right)}{2x}-\cos\left(x^4\right)=0-\cos(0)=-1$$

כאשר המעבר האחרון מסתמך על

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x^2\right)}{2x}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(x^2\right)}{2}=0$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k^2}{n}+3k+3n}$
פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k^2}{n}+3k+3n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\left(\frac{k^2}{n^2}+3\frac{k}{n}+3\right)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2+3\left(\frac{k}{n}\right)+3\right)}$$

ועבור $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+3}$ שהיא רציפה בקטע $[0,1]$ נקבל ש

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2+3\left(\frac{k}{n}\right)+3\right)}\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^2+3x+3}\mathrm{d}x$$

נחשב אינטגרל זה בעזרת השלמה לריבוע (כיוון ש x^2+3x+3 אי פריק):

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+3x+3}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(x+1.5)^2+3-1.5^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(x+1.5)^2+0.75}\mathrm{d}x=\frac{1}{0.75}\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{x+1.5}{\sqrt{0.75}}\right)^2+1}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{0.75}\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{x+1.5}{\sqrt{0.75}}\right)^2+1}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ccc} t=\frac{x+1.5}{\sqrt{0.75}} & \Rightarrow & t=\frac{x+1.5}{\sqrt{0.75}} \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{0.75}}\mathrm{d}x & & \sqrt{0.75}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x\end{array}\right\}=\frac{\sqrt{0.75}}{0.75}\int_{\frac{1.5}{\sqrt{0.75}}}^{\frac{2.5}{\sqrt{0.75}}}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{0.75}}\arctan(t)\Big|_{\frac{x+1.5}{\sqrt{0.75}}}^{\frac{2.5}{\sqrt{0.75}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{0.75}}\left[\arctan(\frac{2.5}{\sqrt{0.75}})-\arctan\left(\frac{1.5}{\sqrt{0.75}}\right)\right]\approx 0.2195$$

.4

(א) קרבו את $\sin(1)$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.
פתרון: טור טיילור של e^x הוא

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ואם נציב $x=1$ נקבל

$$\sin(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 1^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

וזהו טור לייבניץ ולכן מתקיים שלכל k, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|\leq\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right|=\frac{1}{(2k+1)!}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\sin(1)-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{100}\leq\frac{1}{(2k+1)!}$.

עבור $k=2$ נקבל $\frac{1}{100} < \frac{1}{120} = \frac{1}{5!}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{2-1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$כמבוקש.

(ב) קרבו את $\cos(\frac{2+\pi}{2})$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.
פתרון: כיוון ש

$$\cos(\frac{2+\pi}{2}) = \cos(1+\frac{\pi}{2}) = -\sin(1)$$

נקבל ש $-\frac{5}{6}$ קירוב עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$ שהרי לפי סעיף קודם,

$$\left|\cos(\frac{2+\pi}{2}) - \left(-\frac{5}{6}\right)\right| = \left|-\sin(1) + \frac{5}{6}\right| = \left|\sin(1) - \frac{5}{6}\right| < \frac{1}{100}$$

5. תהיינה f,g שתי פונקציות בעלות נגזרות רציפות כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f'(x) > g'(x)$.

(א) הוכיחו/הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) > g(x)$.
פתרון: הפרכה: $f(x) = 2x, g(x) = x$ מקיימות כי $f'(x) = 2 > 1 = g'(x)$ אבל $f(-1) = -2 < -1 = g(-1)$ ולכן לא לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) > g(x)$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: מתקיים כי $f(1) - f(0) \geq g(1) - g(0)$.
פתרון: נגדיר $h(x) = f(x) - g(x)$ ונרצה להראות כי $h(1) - h(0) > 0$ שהרי

$$h(1) - h(0) = f(1) - g(1) - [f(0) - g(0)]$$

לפי משפט לגרנז, קיימת $0 < c < 1$ כך ש

$$\frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = h'(c)$$

כיוון ש h גזירה ורציפה. לכל x מתקיים $h'(x) = f'(x) - g'(x)$ ולפי הנתון $h'(x) > 0$. לכן

$$h(1) - h(0) = \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = h'(c) > 0$$

כמו שרצינו.