

## תרגיל מספר 9 מבנים אלגבריים

3 בינואר 2016

1. יהא  $R$  חוג. הוכח את הבאים:

(א) לכל  $a \in R$  מתקיים  $-(-a) = a$

(ב) לכל  $a, b \in R$  מתקיים  $-(a + b) = -a - b$

(ג) לכל  $a, b \in R$  מתקיים  $a(-b) = -(ab) = (-a)b$

(ד) לכל  $a, b \in R$  מתקיים  $(-a)(-b) = ab$

(ה) לכל  $a \in R$  מתקיים  $(-a)^2 = a^2$

2. יהיו  $R_1, R_2$  שני חוגים. נגדיר את חוג המכפלה להיות הקבוצה  $R_1 \times R_2$  עם חיבור וכפל רכיב רכיב כלומר

$$\forall (a, b), (x, y) \in R_1 \times R_2 : (a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$$

$$\forall (a, b), (x, y) \in R_1 \times R_2 : (a, b)(x, y) = (ax, by)$$

כאשר  $a + x$  זהו חיבור של  $R_1$ ,  $b + y$  זהו חיבור של  $R_2$ . באופן דומה הכפלים המצוינים בשאלה מתייחסים לכפלים של  $R_1, R_2$  לפי ההקשר. עובדה: זה אכן חוג. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם  $R_1, R_2$  חוגים עם חילוק אז גם  $R_1 \times R_2$

(ב) אם  $R_1, R_2$  חוגים עם יחידה אז גם  $R_1 \times R_2$

3. הוכיחו כי הבאים הם חוגים. קבעו האם אלו חוגים חילופיים, האם אלו חוגים עם יחידה והאם חוגים אלו עם חילוק.

(א)  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  עם חיבור וכפל של מספרים שלמים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים הממשיים  $\mathbb{R}$ )

(ב)  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  עם חיבור וכפל של מספרים שלמים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים הממשיים  $\mathbb{R}$ )

(ג) הקבוצה  $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$  עם כפל וחיבור מטריצות.

(ד) קבוצת הפונקציות מהממשיים לממשיים  $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ is function}\}$  עם חיבור פונקציות  $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$  וכפל מטריצות המוגדר כהרכבה  $(fg)(x) = f(g(x))$

(ה) הקבוצה  $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^{2 \times 2}$  עם חיבור וכפל מטריצות.