פתרון תרגיל 8

19 ביולי 2017

.1

(א) $\iint_{A_1} \frac{\mathbf{d}S}{\sqrt{z-y+1}}$ כאשר

$$.A_1 = \left\{(x,y,z) : x \in [0,1]\,, y \in [0,1]\,, z = y + \frac{x^2}{2}\right\}$$

נבצע פרמטריזציה

$$.\,(x,y,z) = \left(x, y, \frac{x^2}{2} + y\right)$$

יחידת השטח הופכת ל

$$.\mathbf{d}S = \sqrt{2+x^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

האינטגרל הופך ל

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{2}+1}}\mathbf{d}x\mathbf{d}y = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y = \sqrt{2}$$

(ב) $\iint_{A_2} x^2 + y^2 dS$ כאשר A_2 הוא הפנים של החרוט $z = \sqrt{x^2+y^2}$ עם $.z \in [0,1]$ נשתמש בהצבה

$$\begin{aligned}
\iint_{A_2} x^2 + y^2 \mathbf{d}s &= \iint_{A_2} \left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y \\
&= \iint_{A_2} \left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\mathbf{d}x\mathbf{d}y \\
&= \iint_{A_2} \left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y
\end{aligned}$$

נבצע החלפת משתנים לפולריות. ונקבל

$$\iint_{A_2} \left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}r^3\mathbf{d}r\mathbf{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi$$

(ג) פתרון לסעיף ג' ניתן למצוא בשאלה 3 בקישור. .

2. נשתמש במשפט הדיברגנט. האינטטגרל הופך ל

$$\begin{aligned}\iint_R F\cdot n\mathbf{d}S &= \iint_R \left(x^3,y^3,z^3\right)\cdot\hat{n}\mathbf{dS}\\ &= 3\iiint_R x^2+y^2+z^2\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z\end{aligned}$$

נעבור לגלגליות. ונקבל

$$\begin{aligned}x &= r\cos\theta\\ y &= r\sin\theta\\ z &= z\\ r &\in [0,1024]\\ \theta &\in [0,2\pi]\\ z &\in [0,20]\end{aligned}$$

ונקבל

$$\begin{aligned}3\iiint_R x^2+y^2+z^2\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z &= 2\pi\int_0^{20}\int_0^{1024} r^3+rz^2\mathbf{d}r\mathbf{d}z\\ &= 2\pi\int_0^{20}\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{1024}-\left.\frac{r^2}{2}z^2\right|_0^{1024}dz\\ &= \pi\int_0^{20}\frac{1024^4}{2}-\frac{1024^2}{2}z^2\mathbf{d}z\\ &= \pi\left(\frac{1024^4}{2}\right)20-\left(\frac{1024^2}{2}\right)\frac{20^3}{3}\end{aligned}$$

3. נשתמש בנוסחה לפנח של גוף סגור:

$$\iint_{\partial M}\left(\frac{x}{3},\frac{y}{3},\frac{z}{3}\right)\cdot n\mathbf{d}S = Vol\left(M\right)$$

כאשר M הוא גוף סגור ב $\mathbb{R}^3$. נשים לב שנורמל היחדידה החיצוני לספרה ברדיוס R נתונה על ידי

$$\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right).$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned}Vol\left(B(0,R)\right) &= \iint_{\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=R\}}\left(\frac{x}{3},\frac{y}{3},\frac{z}{3}\right)\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right)\mathbf{d}S\\ &= \iint_{\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=R\}}\frac{1}{3R}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathbf{d}S\\ &= \iint_{\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=R\}}\frac{R}{3}ds = \frac{R}{3}S\end{aligned}$$

כאשר S הוא שטח הפנים של הספרה ברדיוס 3 .

4. יהי (a_1, a_2a_3) מרכז הספרה. מתקיים _

$$\iint_T x_i \mathbf{d}S = \iint_T (x_i - a_i) + a_i \mathbf{d}S$$

נשים לב $(x_i - a_i)$ היא פונקציה אי זוגית ביחס למישור $x_i = a_i$ והתחום הו סימטרי ולכן האינטגרל $\iint_T (x_i - a_i)\, dS$ מתאפס. ולכן

$$.\frac{\iint_T x_i dS}{\iint_T ds} = \frac{\iint_T a_i ds}{\iint ds} = a_i$$

5. ראשית, נשים לב שהפונקציה $y + z$ היא אי זוגית ולכן מתקיים

$$.\iint_{S^2} y + z\mathbf{d}S = 0$$

ולכן

$$\iint_{S^2} x^2 + y + z\mathbf{d}S = \iint_{S^2} x^2 \mathbf{d}S$$

ניקח את הפרמטריזציה

$$(x, y, z) = f(\phi, \theta) = (\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta)$$

כמו כן, מתקיים

$$\begin{aligned} f_\phi &= (-\sin\phi\cos\theta, \cos\phi\cos\theta, 0) \\ f_\theta &= (-\cos\phi\sin\theta, -\sin\phi\sin\theta, \cos\theta) \end{aligned}$$

נחשב את

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta & 0 \\ -\cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \left(\cos\phi\cos^2\theta, \sin\phi\cos^2\theta, \cos\theta\sin\theta\right)$$

נחשב את הנורמה

$$\left\|\left(\cos\phi\cos^2\theta, \sin\phi\cos^2\theta, \cos\theta\sin\theta\right)\right\| = \cos^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta = \cos^2\theta$$

נציב באינטרגרל ונקבל

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\phi\cos^4\theta \mathbf{d}\theta\mathbf{d}\phi &= \left(\frac{\cos(x)\sin(x) + \phi}{2}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)\left(\frac{\sin(4\theta) + 8\sin(2\theta) + 12\theta}{32}\right)\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{12}{32}\pi^2 \end{aligned}$$

6. נזכר שנגזרת פונקציה f לפי וקטור v, אם f דיפרנציאבילית, נתונה על ידה הנודה

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df_a(v) = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

לכן הנגזרת של v לפי נורמל היחידה n הוא פשוט הביטוי $\langle \nabla v, n \rangle$.
ולכן

(א)

$$\iint_T uv_n \mathbf{d}S = \iint_T \langle uv_n, n \rangle \mathbf{d}S = \iint_T \langle (uv_x, uv_y, uv_z), n \rangle \mathbf{d}S.$$

ממשפט הדיברגנט נקבל את השוויון

$$\begin{aligned}
\iint_T \langle (uv_x, uv_y, uv_z), n \rangle \mathbf{d}S &= \iiint_D div(uv_x, uv_y, uv_z) \mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z \\
&= \iiint_D (u_x v_x + uv_{xx}) + (u_y v_y + uv_{yy}) + (u_y v_z + uv_{zz}) \mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z \\
&= \iiint_D (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z) + u(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\
&= \iiint_D \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v \mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z
\end{aligned}$$

(ב) נשתמש בסעיף א' ונקבל

$$\begin{aligned}
\iiint_T uv_n - vu_n \mathbf{d}S &= \iint_T uv_n \mathbf{d}S - \iint_T vu_n \mathbf{d}S \\
&= \iiint_D \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v - \iiint_D \nabla u \cdot \nabla v - v\Delta u \\
&= \iiint_D u\Delta v - v\Delta u
\end{aligned}$$

(ג) נציב 0 בנוסחה מסעיף א.