הרצאות בקורס טופולוגיה 8822205   משנת 2020

המרצה: פרופסור מיכאל מגרל

אתר המרצה: http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TOP.html

הרצאה 1

מרחבים מטריים

הגדרה (Frechet 1906): **מטריקה** (או **מרחק**) על קבוצה $X \neq \emptyset$ היא פונקציה

$$d : X \times X \to [0,\infty) \quad (x,y) \mapsto d(x,y)$$

אקסיומות:

m_1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

m_2) $d(x,y) = d(y,x)$.

m_3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (אי שוויון המשולש).

אם מתקיימים התנאים אז אומרים ש - (X,d) **מ"מ** (metric space).

קישור מומלץ: https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_space

דוגמאות:

- $(\mathbb{R},d)$ שמוגדרת לפי – $d(x,y) = |x-y|$
- $(\mathbb{R}^n,d)$ שמוגדרת לפי –

א. מטריקה אוקלידית $x = (x_1,..,x_n)$, $y = (y_1,..,y_n)$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

ב. מטריקת הסכום $x = (x_1,..,x_n)$, $y = (y_1,..,y_n)$, $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

ג. מטריקת המקסימום $d(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : i \in \{1,\cdots,n\}\}$

הערה: $d_{\max} \leq d \leq d_1 \leq n d_{\max}$

- בקבוצה $C[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{Z} \; continuous \; functions\}$

א. המוגדרת לפי – $d_{max}(f_1, f_2) = \max_{a \le x \le b} |f_1(x) - f_2(x)|$

"הסטייה" המקסימלית בין הפונקציות f_1, f_2 בקטע

(ממשפט ויירשטראס מתקבל מקסימום בקטע $[a,b]$).

ב. $$d_1(f_1, f_2) = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| \, dx$$

"השטח" בין הגרפים של הפונקציות f_1, f_2 בקטע $[a,b]$

הגדרה: (X,d) נקרא **מרחב פסאודו – מטרי** ($pseudometric$, נקרא $semimetric$ לפעמים) אם:

m_1^p) $x = y \Leftarrow d(x,y) = 0$ (החלשה של m_1).

m_2) $d(x,y) = d(y,x)$.

m_3) $d(x,y) + d(y,z) \ge d(x,z)$

הגדרה: (X,d) נקרא **מרחב אולטרה – מטרי** ($ultrametric$) אם:

m_1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

m_2) $d(x,y) = d(y,x)$.

m_3^u) $\max\{d(x,y), d(y,z)\} \ge d(x,z)$ (חיזוק של m_3).

הערה: $\{pseudometric\} \supset \{metric\} \supset \{ultrametric\}$

- **דוגמה :** לכל קבוצה X נגדיר – $\forall x,y \in X: d_0(x,y) = 0$

פסאודו מטריקת האפס.

זאת פסאודו מטריקה תמיד, אבל זו מטריקה $\Leftrightarrow |X| = 1$ (ז"א אם X נקודון).

- **דוגמה:**

ב - $X = \mathbb{R}^2$, נגדיר – $\rho_1(x,y) := |x_1 - y_1|$

פסאודו – מטריקה (אבל לא מטריקה). למשל – $\rho_1\big((3,5),(3,18)\big) = 0$

(הערה – אם נגדיר יחס שקילות ש – x ו – y שקולים אם $\rho_1(x,y) = 0$ אז ניתן להסתכל על מחלקות השקילות ובעצם יצרנו את $\mathbb{R}$).

טענה 1: יכולנו להגדיר פסאודו-מטריקה d על X כפונקציה $d : X \times X \to \mathbb{R}$. ואז להוכיח (בעזרת האקסיומות) שהיא לא שלילית. ז"א תמיד מתקיים:

$$\forall x, y \in X: d(x,y) \geq 0$$

(ז"א $d: X \times X \to [0,\infty)$).

הוכחה:

$$2 \cdot d(x,y) = d(x,y) + d(x,y) \underbrace{=}_{m_2} d(x,y) + d(y,x) \underbrace{\geq}_{m_3} d(x,x) \underbrace{=}_{m_1^s} 0$$

לכן –

$$2 \cdot d(x,y) \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{d(x,y) \geq 0}$$

■

- **דוגמה:** לכל מטריקה d גם $c \cdot d$:$\forall c > 0$ מטריקה

טענה 2: על כל קבוצה X עם $|X| \geq 2$ יש (לפחות) $\aleph = 2^{\aleph_0}$ מטריקות שונות.

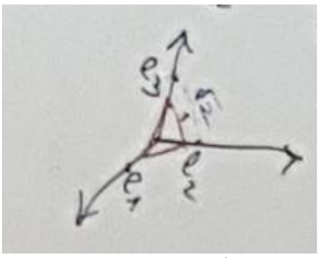
- **דוגמה:** נגדיר על קבוצה X מטריקת 0-1":

$$d_\Delta(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

d_Δ אולטרה-מטריקה (לבדוק!).

למשל: $X = \left\{\frac{e_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{2}}\right\} \subset \mathbb{R}^n$

עם מטריקה שמושרית מ – d נותן דוגמה ספציפית של d_Δ.

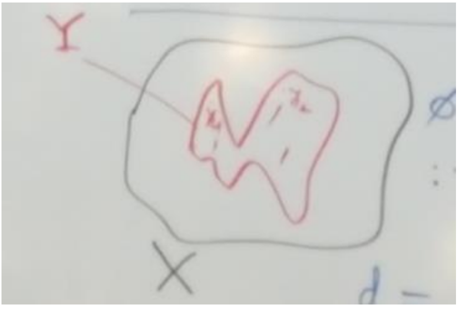


$$d\left(\frac{e_i}{\sqrt{2}}, \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right) = \left\|\frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\|e_i - e_j\|}_{\sqrt{2}} = \begin{cases}1 & i \neq j \\ 0 & i = j\end{cases}$$

נשים לב כי כאשר $i \neq j$ –

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{\ldots + 1^2 + \cdots + 1^2 + \cdots} = \sqrt{2}$$

הגדרה (תת מרחב מטרי): יהי (X,d) מ"מ, $\emptyset \neq Y \subseteq X$.



מטריקת הצמצום של Y מוגדר:

$$d = d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$$

$$\forall y_1, y_2 \in Y$$

מתקבל מ"מ (Y, d_Y) שנקרא **תת מרחב מטרי** של (X,d).

למשל: $\underbrace{Y = \left\{\frac{e_i}{\sqrt{2}}, 1 \leq i \leq n\right\}}_{\text{ת"מ מטרי}} \subset \underbrace{(\mathbb{R}^n, d)}_{=X}$

מטריקת הצמצום על Y כאן שווה ל - d_Δ.

הגדרה: נתון מ"מ (X,d), $\emptyset \neq A, B \subseteq X$.

$$\boldsymbol{d(A,B)} = \inf\{d(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

$$0 \leq d(A,B) < \infty$$

אזהרה: זאת לא מטריקה וגם לא פסאודו-מטריקה בקבוצה $P(X)$ של תת קבוצות.

רמז: אין אישוויון המשולש (תנו דוגמה)

הערה:

לא תמיד inf ניתן להחליף ב - min. למשל –

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

$$min \neq inf = d(A, B) = 0$$

תרגיל (חשוב!): (ראו שיעורי בית 1)

תמיד מתקיים –

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

$$\forall x, y \in X, \emptyset \neq A \subset \underbrace{(X, d)}_{\text{מרחב פ"מ}}$$

רמז: $|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y)$.

קודם להוכיח מקרה פרטי $A = \{a\}$ דרך m_3 + הגדרת inf.

הגדרה (הקוטר):

$$\boldsymbol{diam(A)} \coloneqq \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$$

$$0 \leq diam(A) \leq \infty$$

A נקראת **חסומה** אם $diam(A) < \infty$.

הערה:

לא תמיד $sup = max$.

$$A = (0,1)$$

$$max \ldots \neq sup \ldots = diam = 1$$

הגדרות: יהי (X, d), $a \in X$, $r > 0$.

1) **כדור פתוח** עם מרכז ב a – ורדיוס $r =$:

$$a \in B(a, r) = B_r(a) \coloneqq \{x \in X | d(a, x) < r\}$$

2) **כדור סגור** עם מרכז ב a – ורדיוס $r =$:

$$a \in B[a, r] = B_r[a] \coloneqq \{x \in X | d(a, x) \leq r\}$$

3) **ספרה** $sphere$

$$a \notin S(a, r) = S_r(a) \coloneqq \{x \in X | d(a, x) = r\}$$

הערה:

$$a \in B(a, r) \subseteq B[a, r]$$

$$\underbrace{S(a,r)}_{a\notin} \subsetneq \underbrace{B[a,r]}_{a\in}$$

תרגיל: לתאר $B(a,r), B[a,r], S[a,r]$ במרחב $(X, d_\vartriangle)$.

תרגיל: תנו דוגמאות של מ"מ ששם ייתכן:

$$S(a,r) = \emptyset$$

$$B(a,r) = B[a,r]$$

עבור a, r מסוימים.

<u>אזהרה:</u> זה לא ייתכן ב - $\mathbb{R}^n$ או במרחבים נורמיים.

תרגיל: לתאר $B(a,r), B[a,r], S[a,r]$ במרחבים $(\mathbb{R}^2, d_{max}), (\mathbb{R}^2, d_1), (\mathbb{R}^2, d)$

תכונות: (לבדוק !)

א) $0 \le r_1 \le r_2 \Rightarrow B_{r_1}(a) \subseteq B_{r_2}(a)$.

ב) $diam\big(B_r(a)\big) \le 2r$ (לא תמיד שווה).

ג) $A \subseteq X$ חסומה $\Leftrightarrow \exists z \in X, \exists r > 0: A \subseteq B_r(z)$.

ד) (כדור בתת מרחב) $B_{d_r}(y, \epsilon) = B(y, \epsilon) \cap Y$

ה) מצאו מ"מ (X, d) וכדורים שונים כך ש

$$\begin{cases} B_{r_1}(a) \neq B_{r_2}(b) \\ B_{r_1}(a) \subset B_{r_2}(b) \\ r_1 > r_2 \end{cases}$$

<u>רמז:</u> שוב תת – מרחב, למחוק ...

ו) $d \le \rho \Rightarrow B_\rho(a,r) \subseteq B_d(a,r)$

הגדרה: (מרחב נורמי) נניח E מרחב וקטורי על שדה $\mathbb{R}$. פונקציה $\|\cdot\|: E \to [0,\infty)$ נקראת **נורמה** אם מתקיים:

n_1) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_E$

n_2) $\|cv\| = |c| \cdot \|v\|$ לכל $c \in \mathbb{R}, v \in E$

n_3) $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$

אז $(E, \|\cdot\|)$ נקרא **מרחב נורמי** normed space

משפט: לכל מ"נ $(E,\|\cdot\|)$ הפונקציה

$$d_{\|\cdot\|}:\mathrm{E}\times E\to[0,\infty)\quad d_{\|\cdot\|}(u,v):=\|u-v\|$$

היא מטריקה (שנקראת מטריקה של הנורמה) ותמיד מתקיים $\|\mathrm{v}\|=d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$.

הערה: "ההתאמה" $(E,\|\cdot\|)\mapsto(\mathrm{E},d_{\|\cdot\|})\quad\{normed\ spaces\}\to\{metric\ spaces\}$

היא:

א. לא על

(למשל מרחב מטרי עם 2 נקודות או מרחב מטרי מעגל עם מטריקה אוקלידית "לא מתקבלת "בתמונה" של ההתאמה הנ"ל)

ב. חד חד ערכית

(נובע מהשוויון $\|\mathrm{v}\|=d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$ -- מטריקת הנורמה משחזרת את הנורמה).

דוגמאות של מרחב נורמי:

- במרחב וקטורי $\mathbb{R}^n$ נגדיר

א. נורמה אוקלידית $\|\mathrm{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ (משרה מטריקה אוקלידית)

ב. נורמה של הסכום $\|\mathrm{x}\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|$ (משרה מטריקת הסכום)

ג. נורמה של מקסימום $\|\mathrm{x}\|_{\max}=\max\{|x_i|:i\in\{1,\cdots,n\}\}$ (משרה מטריקת מקסימום)

הערה: $\|\mathrm{x}\|_{\max}\leq\|\mathrm{x}\|\leq\|\mathrm{x}\|_1\leq n\|\mathrm{x}\|_{\max}$

- $\mathrm{C}[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbb{Z}\ continuous\ functions\}$ נגדיר:

א. $\|\mathrm{f}\|_{\max}=\max\{|\mathrm{f(x)}:\mathrm{x}\in[\mathrm{a,b}]\}$ (משרה מטריקת מקסימום)

ב. $\|\mathrm{f}\|_1=\int_a^b|f(x)|\,dx$ (משרה מטריקת השטחים d_1)

תרגיל: לתאר כדור סגור עם רדיוס 3 במרחב $(\mathrm{C}[a,b],\mathrm{d}_{\max})$ עם מרכז בפונקצית האפס.

תרגיל: לתאר כדור סגור עם רדיוס 3 במרחב $(\mathrm{C}[a,b],\mathrm{d}_1)$ עם מרכז בפונקצית האפס.

<u>הגדרה:</u> $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ (בין מרחבים – מטריים). אומרים ש – f **איזומטריה** אם –

$$\begin{cases} f(X)=Y \\ f \text{ שומרת מרחקים} \end{cases}$$

שומרת מרחקים, כלומר –

$$\forall x_1,x_2\in X:\rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)=d(x_1,x_2)$$

טענה: כל איזומטריה היא תמיד חח"ע.

<u>הוכחה:</u>

אם $x_1\neq x_2$ נניח ש – $f(x_1)=f(x_2)$

אז לכן – $0=\rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)=d(x_1,x_2)\underbrace{>}_{m_1}0$

בסתירה!

■

הגדרה: אם בהגדרה הנ"ל דורשים רק את השמירה על מרחקים (לא בהכרח $f(X)=Y$) אז אומרים שהפונקציה היא **שיכון איזומטרי**.

שימו לב: אם $f:X\to Y$ שיכון איזומטרי אז $f:X\to f(X)$ איזומטריה.

הערה:

איזומטריה ב – $Metr$ בתפקיד של איזומורפיזמים. ז"א יש אותן תכונות מטריות.

למשל:

$$[8,10]\not\simeq[1,2]\simeq[5,6]$$

קיים שיכון איזומטרי לינארי $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ לכל $m\le n$

(למשל $(x_1,\cdots,x_m)\mapsto(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0)$)

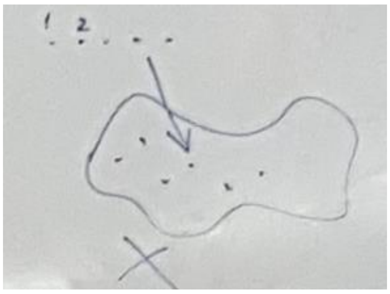
סדרות

הגדרה (תזכורת): **סדרה** בקבוצה X היא פונקציה –

$$\{1,2,\ldots\} = N \xrightarrow{f} X$$

$$n \mapsto f(n) = x_n$$

(מסמנים גם a_n או b_n).



הגדרה: אומרים שסדרה x_n **מתכנסת** ל a במרחב (X,d)

ונסמן $\lim x_n = a$ (או $x_n \xrightarrow{d} a$)

אם: $d(a,x_n) \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

ז"א אם – $\lim\limits_{n\to\infty} d(a,x_n) = 0$

ניסוח שקול: כל כדור $B(a,\mathrm{r})$ של a מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה x_n

ניסוח שקול: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad n \ge n_\varepsilon \Rightarrow d(a,x_n) < \varepsilon$

הרצאה 2

הגדרה: נק' $a \in X$ נקראת **מבודדת** (isolated) אם –

$$\exists \epsilon > 0 : B(a,\epsilon) = \{a\}$$

הגדרה: נניח (X,d) מ"פ. תת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת **פתוחה** אם מתקיים:

$$a \in A \Rightarrow \exists \varepsilon_a > 0 \quad B(a,\varepsilon_a) \subseteq A$$

הערה: נקודה a היא מבודדת אם"ם $\{a\}$ קבוצה פתוחה.

דוגמאות: א. אין נקודה מבודדת ב $\mathbb{R}$ או ב $\mathbb{Q}$ ...

ב. נקודה 3 מבודדת בתת מרחב $[0,1]\cup\{3\}$ של $\mathbb{R}$

ג. ב $\mathbb{Z}$ כל נקודה מבודדת.

הגדרה: מ"מ (X,d) נקרה **<u>דיסקרטי</u>** אם כל נקודה היא מבודדת.

למשל $\mathbb{Z}$ או $\mathbb{N}$ מרחב דיסקרטי ...

כל מרחב X עם מטריקת 0-1 הוא דיסקרטי

הערה: סדרה קבועה לבסוף תמיד מתכנסת (ברור מה הגבול !) בכל מרחב (X,d).

טענה: a נקודה מבודדת במרחב מטרי (X,d) אם ורק אם

$\lim x_n = a$ גורר שהסדרה x_n היא בהכרח קבועה לבסוף $x_1,\cdots,x_m,a,a,\cdots$.

<u>הוכחה:</u> אם a מבודדת אז קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B(\mathrm{a},\varepsilon)=\{\mathrm{a}\}$.

(כיוון ראשון) נניח ש $\lim x_n = a$.

עבור ε הנ"ל קיים $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ כך ש $x_n \in B(\mathrm{a},\varepsilon)=\{\mathrm{a}\}$. אז הסדרה היא לבסוף a.

(כיוון שני) נניח כעת ש a לא מבודדת.

נוכיח: שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל a.

ברור $B(\mathrm{a},1)\neq\{\mathrm{a}\}$. נבחר $x_1 \in B(a,1), x_1 \neq a$. נבחר $0<\varepsilon_2<\min\{d(a,x_1),1\}$.

נעיר ש $0<d(a,x_1)$ כי (X,d) מרחב מטרי ומתקיימת m_1.

שוב בגלל ש a לא מבודדת קיים $x_2 \in B(a,\varepsilon_2), x_2 \neq a$.

אז $x_2 \neq x_1$ (כי $x_1 \notin B(a,\varepsilon_2)$). לכן $x_2 \notin \{a,x_1\}$.

נמשיך בצורה רקורסיבית את הבנייה. אם כבר הגדרנו $x_1,\cdots,x_n$ אז נבחר

$$0<\varepsilon_{n+1}<\min\{d(a,x_1),d(a,x_2),\cdots,d(a,x_n),\tfrac{1}{n}\}$$

קיים $x_{n+1} \in B(a,\varepsilon_{n+1}), x_{n+1}\neq a$. לכן גם $x_{n+1}\notin\{\mathrm{a},x_1,\cdots,x_n\}$.

כך נקבל סדרה (עם איברים שונים) ש $\lim x_n = a$ (כי $0 \leftarrow d(a,x_n)<\frac{1}{n}$).

<u>☺</u>

דוגמה: על שלמים $\mathbb{Z}$ נגדיר מטריקה p-אדית לכל מספר ראשוני $p \in \mathbb{P}$ נתון.

$$d_p(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{p^{k(x,y)}} \,, k(x,y) := \max\{i \,:\, p^i | (x-y)\}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

למשל: $x = 24,\ y = 6\ , p = 3$.

$$d_3(24,6) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$24 - 6 = 18 = 3^2 \cdot 2$$

<u>דוגמה של סדרה מתכנסת שהיא לא קבועה לבסוף עם איברים שונים:</u>

$$x_n := 3^n \in \mathbb{Z}$$

ואכן – $x_n \xrightarrow{d_3} 0$

כי – $d_3(3^n,0) = \frac{1}{3^n} \to 0$

תרגיל: הוכיחו שלא קיימת נקודה מבודדת ב $(\mathbb{Z}, d_p)$

(שימו לב: במרחב $\mathbb{Z}$ עם מטריקה רגילה כל נקודה היא מבודדת).

דוגמה:

ב - $C[0,1]$ קיימת סדרה f_n כך ש –

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{d_1} \theta - \text{פונקציית האפס} \\ f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} \theta - \text{פונקציית האפס} \end{cases}$$

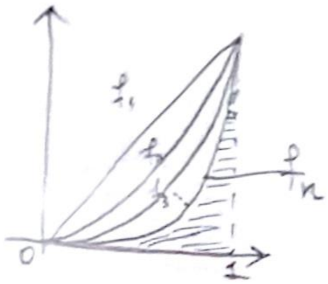
כאשר (תזכורת) –

$$d_1(f_1,f_2) := \int_0^1 |f_1(x) - f_2(x)| dx \quad \text{"השטח"}$$

$$d_{max}(f_1,f_2) := \max_{0 \le x \le 1} |f_1(x) - f_2(x)|$$

נגדיר סדרה של פונקציות (סדרה ב - $C[0,1]$)

$$f_n(x) = x^n \,, x \in [0,1]$$



$$\theta = 0(x) = 0$$

$$d_1(f_n, \theta) = \int_0^1 |f_n(x) - 0| dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ז"א –

$$\lim_{n\to\infty} d_1(f_n, \theta) = 0$$

$$f_n \overset{d_1}{\rightarrow} \theta$$

כעת –

$$d_{max}(f_n, \theta) = \max_{0\le x\le 1} |f_n(x) - 0(x)| = \max_{0\le x\le 1} x^n = 1 \nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow d_{max}(f_n, \theta) \nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} \theta$$

תרגיל: באופן דומה לכל $[a, b]$, $a < b$.

הגדרות:

א) נניח d, ρ מטריקות על <u>אותה קבוצה</u> X. אומרים ש – $\boldsymbol{d}$ **דומיננטי ביחס ל** – $\boldsymbol{\rho}$ אם:

$$\boxed{x_n \overset{d}{\rightarrow} a \Rightarrow x_n \overset{\rho}{\rightarrow} a}$$

לכל סדרה $x_n \in X$.

ב) אומרים ש - $\boldsymbol{d \sim \rho}$ **("שקולות")** אם יש אותה התכנסות. ז"א

$$\boxed{x_n \overset{d}{\rightarrow} a \Leftrightarrow x_n \overset{\rho}{\rightarrow} a}$$

תכונות פשוטות:

1) ($d \sim c \cdot d$, $c > 0$ קבוע.

2) $\rho \le cd \Leftarrow d$ דומיננטי ביחס ל – ρ (הסבר: דרך תכונת הסנדוויץ').

דוגמה:

d_{max} דומיננטי ביחס ל - d_1 בקבוצה $C[a,b]$.

<u>הסבר:</u> מ"ל – $d_1 \le c \cdot d_{max}$.

מ"ל – $\|\cdot\|_1 \le c \cdot \|\cdot\|_{max}$.

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx \le \underbrace{(b-a)}_{\text{קבוע } c>0} \cdot \underbrace{\max_{a\le x\le b} |f(x)|}_{=\|f\|_{max}}$$

דוגמה:

$X := \mathbb{R}^n$. $\boxed{d_{max} \sim d \sim d_1}$

<u>הסבר:</u> $\boxed{d_{max} \le d \le d_1 \le n \cdot d_{max}}$

מסקנה: שלושת המטריקות הנ"ל שונות אבל יש אותה התכנסות.

<u>בהמשך נוכיח</u> – הטופולוגיות שוות!

הגדרה: (טופולוגיה של מרחב פסאודו-מטרי (X,d))

נגדיר טופולוגיה של (X,d) כאוסף של כל תת-קבוצות פתוחות ב X. נסמן:

$$\boldsymbol{top(d)} = top(X,d) := \{(X,d) - \text{קבוצות פתוחות ב}\}$$

כאשר **"קבוצה פתוחה"** מוגדרת כך:

אומרים ש - $O \subseteq X$ היא פתוחה אם מתקיים:

$$\boxed{x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq O}$$

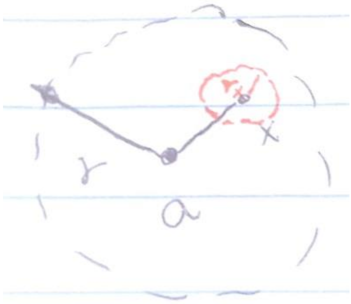
<u>שימו לב:</u> תת קבוצה $A \subseteq X$ **לא פתוחה** ב (X,d) אם"ם <u>קיימת</u> נקודה $a \in A$ כך ש $B(a,\varepsilon)$ לא מוכל ב A לכל $\varepsilon > 0$.

מכאן ברור למשל $\emptyset \in top(d)$.

מסקנה: $top(d) \ni O = \bigcup_{x\in O} B_{\epsilon_x}(x)$

<u>**משפט:**</u> $\forall r > 0, \forall a \in X, \forall (X,d) : B_r(a) \in top(d)$

(ז"א "כדור פתוח" קבוצה פתוחה).



__הסבר:__

__הרעיון:__ $d(a,x)+r_x<r$.

מכאן ניקח כל מס' r_x כך:

$$0<r_x<\underbrace{r-d(a,x)}_{\substack{\text{חיובי}\\ \text{כי } x\in B_r(a)}}$$

נוכיח $B_{r_x}(x)\subseteq B_r(a)$.

נניח $y\in B_{r_x}(x)$, צ"ל - $y\in B_r(a)$.

$$d(a,y)\underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x)+d(x,y)<d(a,x)+r_x<r$$

$$\Rightarrow d(a,y)<r$$

ז"א $y\in B_r(a)$.

זה קורה עבור כל $x\in B_r(a)$ (ועבור r_x מתאים) ולכן $B_r(a)$ קבוצה פתוחה.

☺

תוצאה: ({כדורים פתוחים} **בסיס לטופולוגיה** $top(d)$)

התנאים הבאים שקולים:

1) $\emptyset\neq O\in top(d)$.

2) $O=$ איחוד של "כדורים פתוחים".

תרגיל: הוכיחו שלכל מרחב $(X,top(d))$ מתקיים:

t_1) $\emptyset,X\in top(d)$

t_2) $O_1,O_2\in top(d)\Rightarrow O_1\cap O_2\in top(d)$ (חיתוך סופי של קבוצות פתוחות גם)

t_3) $\forall i\in I\quad O_i\in top(d)\Rightarrow\bigcup_{i\in I}O_i\in top(d)$ (איחוד של קבוצות פתוחות גם)

הערה: $\{t_1,t_2,t_3\}$ "אקסיומות של טופולוגיה" על קבוצה X בצורה אבסטרקטית.

הערה: אחד מהמתמטיקאים שהשפיעו על טופולוגיה בצורה מאוד חזקה היה *Felix Hausdorff*.
על החיים ומותו הטרגי בתקופת הנאצים בגרמניה ממליץ לקרוא

https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff

משפט (תכונת Hausdorff): נניח (X,d) **מרחב מטרי**. אז לכל 2 נקודות שונות יש סביבות זרות.

הוכחה: $a \neq b \overset{m_1}{\Rightarrow} d(a,b) > 0$

ניקח $0 < \epsilon \leq \frac{d(a,b)}{2}$.

אז $B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$.

אם נניח שלא:

$$\exists\, x \in B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b)$$

$$\begin{cases} d(a,x) < \epsilon \\ d(b,x) \overset{m_2}{=} d(x,b) < \epsilon \end{cases}$$

נחבר את 2 המשוואות:

$$d(a,b) \underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x) + d(x,b) < 2\epsilon$$

$$\Rightarrow d(a,b) < 2\epsilon$$

סתירה לבחירה.

☺

משפט (יחידות הגבול): במרחב **מטרי** גבול סדרה הוא יחיד (אם קיים).

הוכחה:

אם נניח בשלילה –

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b$$

כאשר $a \neq b$.

לפי משפט 2 (תכונת Hausdorff) יש סביבות זרות –

$$B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$$

מצד שני, כמעט כל האיברים x_n נמצאים ב - $B_\epsilon(a)$ וגם ב - $B_\epsilon(b)$.

מכאן סתירה ⇐ מש"ל. ☺

דוגמה נגדית (במרחב פסאודו-מטרי אין יחידות הגבול)

במרחב פסאודו-מטרי $X = (\mathbb{R}^2, \rho_1)$ עם

$$\rho_1(x,y) := |x_1 - y_1|$$

ניקח את הסדרה

$$x_n = \left(1 + \frac{2}{n}, 7\right) \to \forall y \in \mathbb{R}: (1, y)$$

אין יחידות של הגבול! (צריך לשים לב שזאת לא מטריקה).

תרגיל: הוכיחו שמרחב פסאו-דומטרי עם יחידות הגבול הוא תמיד מרחב מטרי.

הערה:

ב - (X,d) מ"פ, $a \in X$, x_n סדרה. התנאים הבאים שקולים:

1) $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$ $\quad$ $(d(x_n,a) \overset{\mathbb{R}}{\to} 0)$.

2) $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, n > N: d(x_n, a) < \epsilon$.

3) בכל ϵ-סביבה של a (ז"א בכל $B(a,\varepsilon)$) נמצאים כמעט כל האיברים של הסדרה.

4) בכל קבוצה פתוחה O שמכילה את a, כמעט כל האיברים נמצאים ב $- O$.

הגדרה: ת"ק A במרחב (X,d) נקראת **סגורה** אם המשלים קבוצה פתוחה.

ז"א אם $\qquad A^c \coloneqq X/A \in top(d)$

למשל:

$B_r[a]$ ("כדור סגור") הוא סגור.

לבדוק לבד! (יש הוכחה פשוטה גם דרך רציפות פונקציות !)

תרגיל: איחוד סופי של קבוצות סגורות סגור. חיתוך של קבוצות סגורות סגור.

רמז: ניתן להוכיח את זה ע"י התכונות של קבוצות פתוחות וחוקי דה-מורגן.

תרגיל: הוכיחו שכל נקודון סגור במרחב מטרי (ושזה לא נכון במרחב פסאודו-מטרי).

הסיקו שכל תת קבוצה סופית במרחב מטרי היא סגורה.

סדרות קושי ושלמות

הגדרה: (X,d) מ"מ. סדרה $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ נקראת **סדרת קושי** $(Cauchy)$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$d(x_i, x_j) < \epsilon$$

$$i, j \geq n_\epsilon$$

הערה: אם x_n מתכנסת ב $- X$ $(\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \in X)$ אז x_n סדרת קושי (לבדוק!).

הגדרה: מ"מ (X,d) נקרא **שלם** $(Complete)$ אם לכל סדרת קושי x_n ב $- X$ יש <u>גבול ב-X.</u>

הגדרה: מ"נ $(E,\|\cdot\|)$ נקרא **מרחב בנך** $(Banach\ space)$ אם $\left(E, d_{\|\cdot\|}\right)$ <u>שלם</u>.

דוגמאות:

א) $(\mathbb{R}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, d_1)$, $(\mathbb{R}^n, d_{max}) \in Banach$.

ב) $(C[a,b], d_{max}) \in Banach$.

ג) $(C[a,b], d_1) \notin Banach$ (פרטים בתרגול).

ד) $(C[a,b], d_2) \notin Banach$,

$$\langle f,g\rangle \coloneqq \int_a^b f(x)g(x)dx$$

מכפלה פנימית ב - $C[a,b]$ שממנה מקבלים נורמה:

$$\|f\|_2 \coloneqq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

הנורמה מגדירה מטריקה d_2 על מרחב הפונקציות $C([a,b])$.

ה) נגדיר –

$$l_\infty \coloneqq \left\{x = (x_1, x_2, \dots) \middle| \|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\right\}$$

מרחב של סדרות חסומות.

כעת $(l_\infty, \|\cdot\|) \in Banach$.

<u>הכללה:</u> מרחב פונקציות חסומות על קבוצה S

$$l_\infty(S) \coloneqq \left\{f\colon S \to \mathbb{R} \middle| f(S) \text{ חסום ב } - \mathbb{R}\right\}$$

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x\in S} |f(x)|$$

<u>2 מקרים פרטיים:</u>

1) $S = \mathbb{N}$, אז נקבל את $l_\infty(\mathbb{N}) = l_\infty$.

2) $S = \{1,2,\dots,n\}$, אז נקבל את $(\mathbb{R}^n, d_{max})$.

ו) $(l_2, \|\cdot\|) \in Banach$.

כאן l_2 = "מרחב הילברט סדרתי":

הכללה הכי טבעית של מרחב אוקלידי (אבל בעל מימד אינסוף).

$$l_2 := \{(x_1, x_2, \dots) \big| x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$$

מרחב ווקטורי עם חיבור וכפל בסקלר רגיל.

יש מכפלה פנימית – $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$$

דוגמאות נוספות לשיכונים איזומטריים

1) $\mathbb{R}^n \hookrightarrow l_2$ לפי:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$$

זהו שיכון איזומטרי לינארי (לבדוק!).

2) $(\mathbb{N}, d_\Delta) \hookrightarrow l_2$ לפי: $n \longmapsto \frac{e_n}{\sqrt{2}}$

הערה:

2 תכונות מאוד חשובות של שלמות:

1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות (אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלמה לגבי מטקיקת הצמצום).

2) נניח (Y, d_Y) תת מרחב מטרי של (X, d). אז אם (Y, d_Y) שלם אז Y סגורה ב – X.

רמז: תת קבוצה היא סגורה $\Leftrightarrow$ היא "סגורה בנוגע להתכנסות".

דוגמה:

$X = (\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ לא שלם!

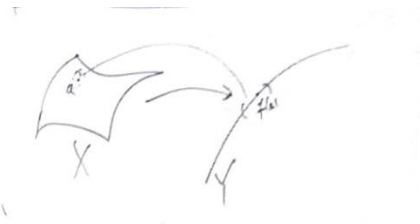
לדוגמה עבור $p = 3$: $x_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב – X (פרטים בתרגול).

פונקציות רציפות

הגדרה (רציפות): נניח (X, d), (Y, ρ) מרחבים. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת **רציפה בנקודה $a \in X$** אם:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0: d(a, x) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(a), f(x)\big) < \epsilon}$$



נסמן:

$$f \in C(X,Y)$$

$$continuous\ functions$$

אם $Y = \mathbb{R}$ אז $f \in C(X)$.

f נקראת **רציפה**, כאשר f רציפה בכל נקודה $a \in X$.

<u>הגדרה:</u> אומרים ש – f **רציפה במידה שווה (במ"ש)** *uniformly continuous*

אם בבחירה של δ אין תלות ב – a. ז"א –

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta: d(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(x_1),f(x_2)\big) < \epsilon$$

$$\boxed{f \in UC(X,Y)}$$

<u>הגדרה:</u> אומרים ש – f מקיימת **תנאי ליפשיץ** $(Lipschitz)$ לגבי המקדם $c > 0$ אם:

$$\boxed{\forall x_1,x_2 \in X: \rho\big(f(x_1),f(x_2)\big) \le c \cdot d(x_1,x_2)}$$

נסמן –

$$\boxed{f \in Lip_c(X,Y)}$$

כאשר –

$$\boxed{Lip(X,Y) = \bigcup_{c>0} Lip_c(X,Y)}$$

תמיד:

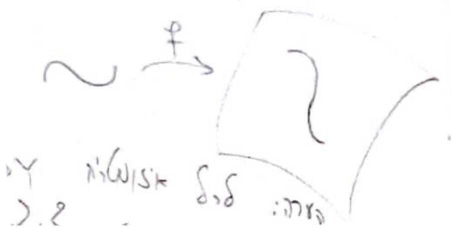
$$\boxed{Lip(X,Y) \subset UC(X,Y) \subset C(X,Y)}$$

<u>דוגמאות פשוטות מאנליזה:</u>

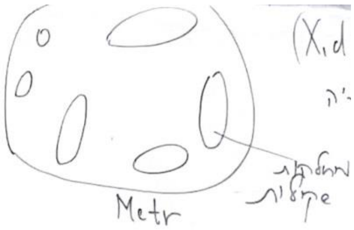
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ רציפה אבל לא במ"ש.

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ רציפה במ"ש אבל לא ליפשיץ.

<u>הערה:</u> כל שיכון איזומטרי פונקצית ליפשיץ עם מקדם 1 (אבל לא ההפך ! תנו דוגמה).



הערה: אם קיימת איזומטריה, נסמנה – $(X,d) \simeq (Y,d)$



זהו "יחס שקילות" באוסף Metr (מרחבים מטריים).

1) $(X,d) \simeq (X,d)$ (פ' הזהות).

2) $(X,d) \simeq (Y,\rho) \Leftarrow (Y,\rho) \simeq (X,d)$ (פ' הופכית).

3) (ההרכבה) $\begin{cases}(X_1,d_1) \simeq (X_2,d_2) \\ (X_2,d_2) \simeq (X_3,d_3)\end{cases} \Rightarrow (X_1,d_1) \simeq (X_3,d_3)$

תרגיל: הוכיחו שלא קיימת איזומטריה

$$(\mathbb{Z},d_5) \not\simeq (\mathbb{Z},d_3)$$

דוגמאות:

1) $\mathbb{R} \leftarrow f_A: X \ni Lip_1(X,\mathbb{R})$ המוגדרת ע"י:

$$f_A(x) = d(x,A)$$

<u>הסבר:</u> שימוש באי שוויון

$$|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$$

$$\forall x,y \in X, \emptyset \ne A \subset \underbrace{(X,d)}_{\text{מרחב פ"מ}}$$

2) $[0,\infty) \xleftarrow{\|\cdot\|} f: E \ni Lip_1(E,\mathbb{R})$, כאשר E מרחב נורמי.

$$x \mapsto \|x\|$$

הסבר: $\big|\|u\| - \|v\|\big| \underbrace{\le}_{c=1} \|u-v\|$

3) **הזזה** במ"נ (מרחב נורמי) היא תמיד איזומטריה.

$$T_v: E \to E$$

$$T_v(x) = v + x$$

$v \in E$ וקטור נתון.

הסבר: $\|T_v(z) - T_v(y)\| = \|(v+x)-(v+y)\| = \|x-y\|$

משפט (עיקרון $Heine$): נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f:X\to Y$ התנאים הבאים שקולים:

1) f רציפה.

2) f <u>שומרת על התכנסות</u> (כלומר, $x_n \overset{d}{\to} a \Rightarrow f(x_n) \overset{\rho}{\to} f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח. ז"א,

$$\forall O \in top(\rho): f^{-1}(O) \in top(d)$$

נוכיח בהרצאה הבאה ! קודם נדון כמה תוצאות.

משפט (השוואת טופולוגיות): נניח ש - d,ρ מטריקות על אותה קבוצה X. אז התנאים הבאים שקולים:

1) $top(\rho) \subseteq top(d)$.

2) d דומיננטי ביחס ל – ρ. ז"א – $x_n \overset{d}{\to} a \Rightarrow x_n \overset{\rho}{\to} a$

הוכחה: נגדיר את "פונקצית הזהות" –

$$(X,d) \overset{id}{\to} (X,\rho)$$
$$x \mapsto x$$

נשתמש במשפט הקודם (עיקרון היינה).

כש - $f=id$, אז $f^{-1}(O)=O$. לכן תנאי 3 מעיקרון היינה יהיה –

$$\forall O \in top(\rho): O \in top(d)$$
$$\Rightarrow top(\rho) \subseteq top(d)$$

תנאי 2 בעיקרון היינה נותן לנו ישירות את התנאי השני במשפט שלנו.

■

תוצאה: התנאים הבאים שקולים:

1) $top(d)=top(\rho)$.

2) $d \sim \rho$.

<u>הסבר:</u>

נובע מיד! 2 כיוונים במשפט הקודם.

דוגמה:

1) עבור $X=\mathbb{R}^n$:

$$top(d_{max})=top(d)=top(d_1)$$

כי: $d_{max} \sim d \sim d_1$

2) עבור $X = C[a,b]$ $(a < b)$:

$$top(d_1) \subsetneq top(d_{max})$$

(מוכל) כי d_{max} דומיננטי ביחס ל - d_1:

$$d_1 \leq (b-a)d_{max}$$

לכן לפי משפט ההשוואה נקבל שיש הכלה של הטופולוגיות.

(לא שווה) כעת, יש **הכלה ממש** כי קיימת סדרה f_n ב - $C[a,b]$ $(a < b)$ וגם סדרה f ב - $C[a,b]$ כך ש –

$$f_n \xrightarrow{d_1} f \ , f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} f$$

ראינו דוגמה בהרצאה ב - $[0,1]$.

הרצאה 3

משפט (עיקרון $\boldsymbol{Heine}$): נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \to Y$ התנאים הבאים שקולים:

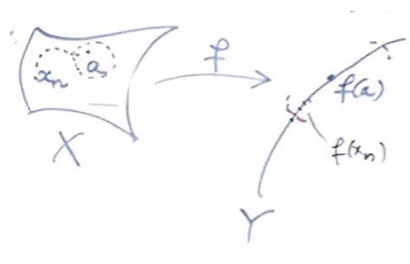
1) f רציפה.

2) f <u>שומרת על התכנסות</u>   (כלומר, $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח   (ז"א, $\forall O \in top(\rho): f^{-1}(O) \in top(d)$)

הוכחה (עיקרון היינה):

$(1) \Leftarrow (2)$:



נתון ש - $x_n \xrightarrow{d} a$. צ"ל - $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$.

f רציפה $\Leftarrow$ f רציפה בנקודה $a \in X$.

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0: f\big(B_\delta(a)\big) \subseteq B_\epsilon\big(f(a)\big)$$

(הגדרת $Cauchy$).

לפי הגדרת התכנסות, כמעט כל האיברים של x_n נמצאים בכדור $B_\delta(a)$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: x_n \in B_\delta(a)$$

אז כמעט כל האיברים של הסדרה $f(x_n)$ נמצאים ב- ϵ -סביבה: $B_\epsilon\big(f(a)\big)$

לכן הוכחנו: $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$.

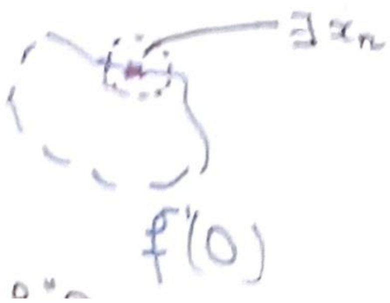
<u>$(2) \Leftarrow (3)$:</u>

נניח בשלילה ש – (3) לא מתקיים. ז"א:

$$\exists O \in top(\rho): f^{-1}(O) \notin top(d)$$

כלומר O פתוחה בעוד ש - $f^{-1}(O)$ לא פתוחה ב - (X,d).

ז"א קיימת נקודה "<u>לא פנימית</u>" – $\exists a \in f^{-1}(O): \forall \epsilon > 0 \;\; B_\epsilon(a) \nsubseteq f^{-1}(O)$



עבור כל $\epsilon := \frac{1}{n}$ קיים $x_n \in X$ כך ש –

$$\begin{cases} x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \\ x_n \notin f^{-1}(O) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(a, x_n) < \dfrac{1}{n} \\ f(x_n) \notin O \end{cases}$$

מהשורה הראשונה נובע ש $d(a, x_n) < \frac{1}{n}$ ולכן - $x_n \xrightarrow{d} a$.

על מנת לקבל סתירה, מספיק להוכיח – $f(x_n) \overset{\rho}{\nrightarrow} f(a)$.

$f(a) \in O \in top(\rho)$ וכן O פתוחה ולכן $f(a)$ נקודה פנימית ב O.

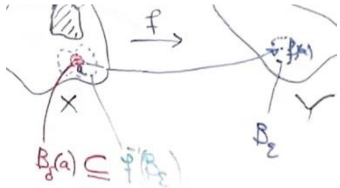
אז קיים $\epsilon > 0$ כך ש – $B_\epsilon\big(f(a)\big) \subseteq O$

אבל מהשורה השנייה מקודם $f(x_n) \notin O$ ולכן $\forall n: f(x_n) \notin B_\epsilon\big(f(a)\big)$.

לכן – $f(x_n) \overset{\rho}{\nrightarrow} f(a)$

<u>$(3) \Leftarrow (1)$:</u>

בודקים את (1) - רציפות "דרך כדורים".



לכל $\epsilon > 0$ נתון – $O = B_\epsilon\big(f(a)\big) \in top(\rho)$ (למדנו שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה).

לכן בגלל (3) – $f^{-1}(O) = f^{-1}\Big(B_\epsilon\big(f(a)\big)\Big) \in top(d)$ גם פתוח.

אכן $a \in f^{-1}(O)$, ולכן a נקודה פנימית, אז קיים $\delta > 0$ כך ש –

$$B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(O)$$

$$\Rightarrow f\big(B_\delta(a)\big) \subseteq f\big(f^{-1}(O)\big) \subseteq O = B_\epsilon\big(f(a)\big)$$

הוכחנו!

☺

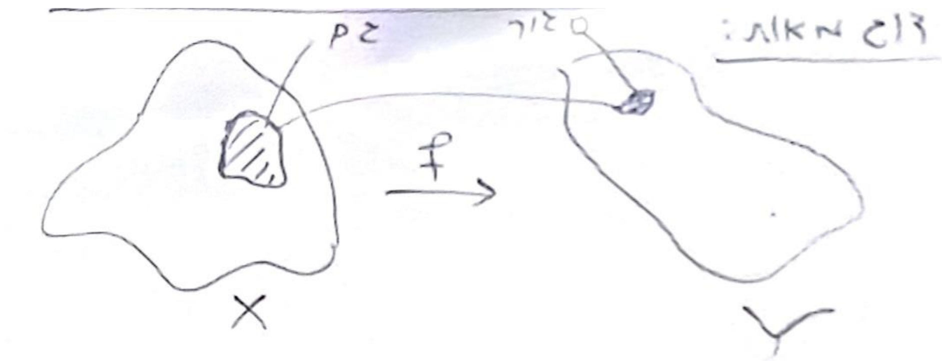
הערה: במשפט $Heine$ שלמדנו (3 תנאים) אפשר להוסיף תנאי רביעי על קבוצות סגורות.

4) מקור של קבוצה סגורה הוא גם סגור.

<u>הסבר מקוצר</u>: $f^{-1}(A^c) = \big(f^{-1}(A)\big)^c$

ובנוסף A סגורה אם ורק אם A^c פתוחה.

ולכן $(4) \Leftrightarrow (3)$.

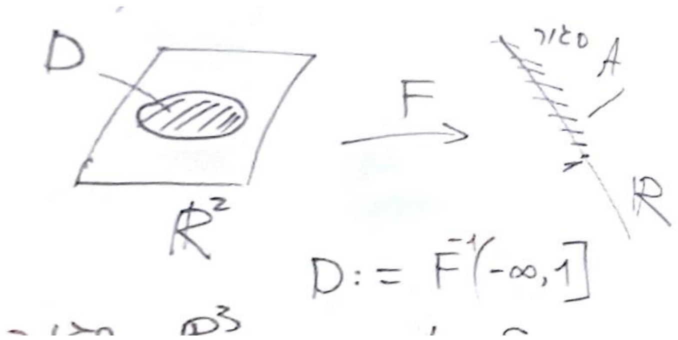


דוגמאות:

1) $D \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\right\}$ סגור ב - $\mathbb{R}^2$.

הסבר: $F(x,y) \coloneqq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

רציפה (פונקציה פולינומיאלית!).



2) כל מישור ב - $\mathbb{R}^3$ סגור. למשל –

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\underbrace{2x+3y-4z+5}_{F(x,y,z)}=0\right\}$$

סגור, כי את D ניתן לכתוב כ - $D=F^{-1}(0)$ ואכן $\{0\}$ סגור ב - $\mathbb{R}$.

3) בכל מ"מ (X,d):

$$B_r[a]:=\{x\in X|d(a,x)\le r\}$$

$$S_r(a):=\{x\in X|d(a,x)=r\}$$

סגורות!

הסבר:

נגדיר פו' $f_a:X\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=d(a,x)$. זוהי פונקציית ליפשיץ – $f_a\in Lip_1\subset C(X)$.

$f_a^{-1}(-\infty,r]=B_r[a]$ גם סגור!

$f_a^{-1}(\{r\})=S_r(a)$ גם סגור!

4) $B_r(a)$ פתוחה (באופן דומה).

$B_r(A):=\{x\in X|d(x,A)<r\}$ פתוחה.

כאן יש צורך בפונקצית ליפשיץ $f_A(x)=d(x,A)$, $f_A:X\to\mathbb{R}$.

5) $GL_n(\mathbb{R})=\det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ מטריצות הפיכות, <u>פתוחה</u> במרחב של מטריצות ריבועיות.

$$Mat_n(\mathbb{R})\overset{metr}{\simeq}\mathbb{R}^{n^2}$$

<u>הגדרות:</u> (X,d) מ"מ, $A\subseteq X$.

א) **"הסגור של A"** $(Closure\ of\ A)$:

$$A\underbrace{\subseteq}_{m_1}\bar{A}=cl(A):=\{x\in X|\ d(x,A)=0\}$$

ב) **"סגור סדרתי"** $(sequential\ closure)$:

$$A \underbrace{\subseteq}_{\substack{\text{סדרה קבועה} \\ \text{תמיד מתכנסת!}}} scl(A) \coloneqq \left\{x \in X \middle| \exists a_n \in A : x = \lim_{n\to\infty} a_n\right\}$$

משפט 1: בכל <u>מ"מ</u> תמיד $\boxed{scl(A) = cl(A)}$.

<u>**הוכחה:**</u>

$(\subseteq)$: נניח $z \in scl(A)$ אז –

$$\begin{cases} z = \lim_{n\to\infty} a_n \\ \exists a_n \in A \end{cases}$$

לפי הגדרה –

$$d(z, a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow d(z, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$$

המעבר נובע מהגדרת אינפימום.

$$\Rightarrow d(z, A) = 0$$

$$\Rightarrow z \in cl(A)$$

$(\supseteq)$:

$$z \in cl(A)$$

$$\Rightarrow \inf_{a\in A} d(z, a) = d(z, A) = 0$$

(לפי הגדרת inf).

נקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$ כך ש –

$$\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{0}_{=0} \le d(z, a_n) \le \frac{1}{\underbrace{n}_{\to 0}}$$

מכאן – $a_n \in A \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = z \in scl(A)$

☺

משפט 2 (קריטריון סגירות במ"מ): נניח (X, d) מ"מ, $A \subseteq X$. התנאים הבאים שקולים:

1) A סגורה ב – X (ז"א משלים לפתוחה).

2) $A = scl(A)$ (A סגורה לגבי הגבולות).

3) $A = cl(A)$.

4) A "קבוצת אפסים" של פונ' רציפה (ז"א קיימת פ' רציפה $\mathbb{R} \xleftarrow{f} X$ כך ש - $A = f^{-1}(0)$).

<u>**הוכחה:**</u>

$(1) \Leftarrow (2)$:

נניח בשלילה ש - $A \neq scl(A)$.

אז (בגלל ש - $A \subseteq scl(A)$) קיימת נק' –

$$\begin{cases} z \in scl(A) \\ z \notin A \end{cases}$$

לכן –

$$\begin{cases} z = \lim a_n \ , \exists a_n \in A \\ z \notin A \end{cases}$$

לכן –

$$\begin{cases} z = \lim a_n \ , \exists a_n \in A \\ z \in A^c \end{cases}$$

A סגורה (נתון). ז"א A^c <u>פתוחה</u>!

ואז z נקודה פנימית של A^c.

$$\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(z) \subseteq A^c$$

אז אף איבר של הסדרה a_n לא נמצה בכדור $B_r(z)$ וזאת סתירה ל –

$$\begin{cases} z = \lim a_n \\ a_n \in A \end{cases}$$

<u>(2) ⇐ (3):</u>

בגלל משפט 1.

<u>(3) ⇐ (4):</u>

נגדיר –

$$f_A(x) = d(x, A) \qquad f_A : X \to \mathbb{R} \ (\text{רציפה!})$$

אז –

$$f_A^{-1}(0) = \{x \in X | f_A(x) = 0\} = \{x \in X | d(x, A) = 0\} = cl(A) \underbrace{=}_{\text{נתון } 3} A$$

ולכן $f_A^{-1}(0) = A$.

<u>(4) ⇐ (1):</u>

נפעיל "תוספת למשפט $Heine$" (מקור לסגור גם סגור) $f_A^{-1}(0)$ -- מקור של נקודון.

☺

<u>הגדרה:</u> במ"מ (X, d) עבור $A \subseteq X$, נגדיר –

$$A' \coloneqq \{x \in X | x \in cl(A \backslash \{x\})\} \overset{metr}{=} \{x \in X | x \in scl(A \backslash \{x\})\}$$

נקודות ההצטברות של A.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו ש $z \in A'$ אם ורק אם קיימת סדרה ב A עם איברים שונים שמתכנסת ב X לנקודה z .

<u>רמז:</u> ראו בהרצאה 2 טענה (על נקודה מבודדת) הוכחה של כיוון שני. תשתמשו בעובדה ש

$d(z, A\backslash\{z\}) = 0$ על מנת לבנות סדרה מבוקשת (במקום העובדה בטענה ש z לא מבודדת).

<u>תרגיל:</u>

1) $A = \left\{\frac{1}{n}\middle| n \in \mathbb{N}\right\}$.

$$A' = \{0\}$$

$$A'' = \emptyset$$

2) $A = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)\middle| n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

$$A' = \left\{(0,0), \left(\frac{1}{n}, 0\right), \left(0, \frac{1}{m}\right)\right\}$$

$$A'' = \{(0,0)\}$$

$$A''' = \emptyset$$

תכונות (במ"מ): (לבדוק לבד!).

א) $cl(A) = A \cup A'$.

ב) A סגורה $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

הגדרה: אומרים שתת קבוצה A ב- X היא:

א) **"קבוצת G_δ"** אם A שווה לחיתוך **בן מנייה** של קבוצות פתוחות.

(ז"א $\exists O_n \in top(d), n \in \mathbb{N}: A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$).

ב) **"קבוצת F_σ"** אם A שווה לאיחוד **בן מנייה** של קבוצות סגורות.

(ז"א $\exists P_n \subseteq X: A = \bigcup_{n\in N} P_n$, P_n סגורה $\forall n:$).

הערה: $A \in G_\delta \Leftrightarrow A^c \in F_\sigma$

תרגיל:

"בעזרת פונקציה רציפה" הוכיחו שבמ"מ (X, d):

א) כל קבוצה סגורה היא G_δ.

ב) כל קבוצה פתוחה היא F_σ

תרגיל: הוכיחו 2 תכונות חשובות של שלמות:

1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות

(אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלם כתת מ"מ).

2) נניח (Y, d_Y) תת מרחב מטרי של (X, d). אז אם (Y, d_Y) שלם אז Y סגורה ב – X.

רמז: תת קבוצה היא סגורה $\Leftrightarrow$ היא "סגורה בנוגע להתכנסות סדרות".

השלמה של מרחב מטרי

הגדרה: **השלמה** של מ"מ (X, d) הוא

שיכון איזומטרי $M \overset{i}{\hookrightarrow} (X, d)$, כאשר M **מ"מ שלם** ומתקיים: $cl(i(X)) = M$.

הערה:

קל לבדוק שהסגור $cl(\mathrm{A})$ של A בכל מרחב הוא תמיד קבוצה סגורה.

(וזה נכון אפילו למרחבים טופולוגיים, נוכיח בהמשך).

משפט (השלמה): לכל מ"מ (X, d) יש השלמה.

(בהמשך נציג 2 הוכחות (מקוצרות)).

הוכחה ראשונה מבוססת על –

משפט (שיכון למרחב $\boldsymbol{Banach}$): לכל מ"מ (X, d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב $Banach$ (= מ"נ שלם).

הוכחה:

למדנו על מרחב $\left(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup}\right) \in Banach$.

$$l_\infty(X) = \left\{f: X \to \mathbb{R} \middle| \text{חסומה } f(X)\right\}$$

$$\|f\|_{sup} \coloneqq \sup_{x \in X} |f(x)|$$

נראה כי ניתן לשכן את X לתוך $l_\infty(X)$:

נבחר $z \in X$. ונגדיר – $\varphi: X \to l_\infty(X)$

$$a \longmapsto \varphi(a) = \hat{a} \qquad \hat{a}: X \to \mathbb{R} \; \boxed{\hat{a}(x) = d(a, x) - d(z, x)}$$

$\hat{a} \in l_\infty(X)$, ז"א $\hat{a}$ פונקציה חסומה כי –

$$|\hat{a}(x)| = |d(a, x) - d(z, x)| \le \underbrace{d(a, z)}_{\text{קבוע}}$$

מ"ל $\forall a, b \in X: \boxed{d(a, b) = \left\|\hat{a} - \hat{b}\right\|}$.

$$\|\hat{a}-\hat{b}\| = \sup_{x\in X}\left|\left(d(a,x)-d(z,x)\right)-\left(d(b,x)-d(z,x)\right)\right| =$$

$$= \sup_{x\in X}|d(a,x)-d(b,x)| \le d(a,b)$$

מצד שני, אם נציב $x = b$ נקבל –

$$\|\hat{a}-\hat{b}\| = \sup_{x\in X}|d(a,x)-d(b,x)| \ge \sup|d(a,b)-0| = d(a,b)$$

לכן הוכחנו את השוויון.

☺

משפט (השלמה): לכל מ"מ (X,d) יש השלמה.

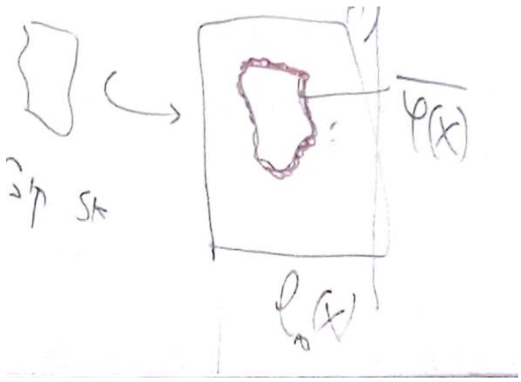
הוכחה ב – 2 דרכים:

דרך א':

הוכחנו: הוכחנו שלכל (X,d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב $Banach$ –

$$\varphi: X \to l_\infty(X)$$

$l_\infty(X)$ פונקציות חסומות וממשיות. ($\left(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup}\right)$ מרחב $Banach$).



$$\overline{\varphi(x)} \subset l_\infty(X)$$

קבוצה סגורה במרחב שלם ולכן גם שלם.

אז קיבלנו השלמה – $X \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \overline{\varphi(X)} = cl(\varphi(X))$

☺

דרך ב': "דרך סדרות קושי" (הוכחה מקוצרת - רק שלבים בסיסיים). הוכחה מפורטת אפשר למצוא למשל בספר "טופולוגיה קבוצתית",ד. ליבוביץ (האוניברסיטה הפתוחה) חלק א.

הרעיון מאוד דומה להשלמה $\mathbb{Q} \overset{i}{\hookrightarrow} \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ של מרחב רציונליים. כשאנחנו מגדירים מספר ממשי כמחלקת שקילות של סדרות קושי ברציונליים. ראו גם השלמה של $(C[a,b],d_1)$.

<u>שלב א':</u> עבור מ"מ נתון (X,d) נגדיר קבוצה – $\tilde{X} := \{$סדרות קושי ב $(X,d)\}$

נגדיר פסאודו-מטריקה באופן טבעי: לכל זוג של ס"ק $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$

נגדיר – $\tilde{d}(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$

הגבול קיים כי מדובר על סדרות קושי וקל לבדוק ש $d(x_n,y_n)$ ס"ק ב $\mathbb{R}$

(רמז: שימו לב $|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)|\le d(x_n,x_m)+d(y_m,y_n)$).

לכן הסדרה $d(x_n,y_n)$ באמת מתכנסת ב $\mathbb{R}$ כי $\mathbb{R}$ שלם.

$(\tilde{X},\tilde{d})$ מרחב פסאודו-מטרי.

<u>שלב ב':</u>

טענת עזר: (*מרחב מטרי מושרה ע"י מרחב פסאודו-מטרי*)

נניח $(\tilde{X},\tilde{d})$ מרחב פסאודו-מטרי (כללי).

יוצרים ממנו מרחב מטרי מנה שמקבלים באופן הבא.

על מרחב פסאודו-מטרי $(\tilde{X},\tilde{d})$ מגדירים יחס שקילות ("מרחק אפס"):

$$x\Omega y \overset{def}{=} \tilde{d}(x,y)=0$$

נקבל קבוצת מנה: $M := \tilde{X}/\Omega = \{$מחלקות שקילות $[x]\}$

$$[x] := \{y\in\tilde{X} \mid \tilde{d}(x,y)=0\}$$

נגדיר ב M מרחק טבעי (דרך הנציגים): $\bar{d}([x],[y])=\tilde{d}(x,y)$.

אין תלות בנציגים וזאת באמת מטריקה. אז: $(\mathrm{M},\bar{d})$ מרחב מטרי,

הפונקציה $(\tilde{X},\tilde{d})\to(\mathrm{M},\bar{d}),\ x\mapsto[x]$ היא על ושומרת מרחקים.

נחזור למשפט -- נפעיל "טענת עזר" על מרחב פסאודו-מטרי שלנו $(\tilde{X},\tilde{d})$ של ס"ק.

נגדיר שיכון: $X \overset{i}{\hookrightarrow} M \quad x\longmapsto[\tilde{x}]$

כאשר $\tilde{x} \in \tilde{X}$ סדרה קבועה $x, x, x \ldots$. אז מתקיימים תנאים הבאים:

i שיכון איזומטרי.

$$d(x,y) = \overline{d}\,([\tilde{x}],[\tilde{y}])$$

$$\overline{\iota(X)} = M$$

(M,ρ) מרחב שלם!. מש"ל

☺

דוגמה 1: $\mathbb{Q}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}$.

תזכורת: $X = (\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ לא שלם! (היה בתירגול)

למשל עבור $p = 3$: $x_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב – X.

דוגמה 2: $(\mathbb{Z}, d_p) \hookrightarrow (\overline{\mathbb{Z}}, \overline{d_p})$ כאשר: השלמה היא

$$\overline{\mathbb{Z}} = \{\text{שלמים } p - \text{אדיים}\} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k \,, b_k \in \underbrace{\{0,1,\ldots,p-1\}}_{p \text{ שאריות מודולו}} = \mathbb{Z}_p \right\}$$

שהוא קומפקטי (ולכן גם שלם) ! בעצם זאת חבורה טופולוגית קומפקטית.

הגדרות: מ"מ (X,d) נקרא:

א) **"קומפקטי סדרתית"** אם לכל סדרה ב – X יש תת – סדרה מתכנסת <u>ב – X.</u>

ב) **"קומפקטית"** אם <u>לכל</u> כיסוי פתוח של X יש תת כיסוי <u>סופי</u>.

הערה:

1) נוכיח בהמשך שבמרחבים מטריים ההגדרות הנ"ל הן שקולות.

2) נוכיח גם (בעצם אתם מכירים) את משפט היינה – בורל ($Heine - Borel$):

התנאים הבאים שקולים –

- $X \subset \mathbb{R}^n$ (כתת מרחב) הוא קומפקטי.
- X חסום וסגור.

תרגיל: הוכיחו שתת קבוצה $X = \{e_n : n \in \{1,2,\ldots\}\}$ במרחב הילברט l_2 הוא חסום וסגור אבל X **לא קומפקטי** כמרחב מטרי.

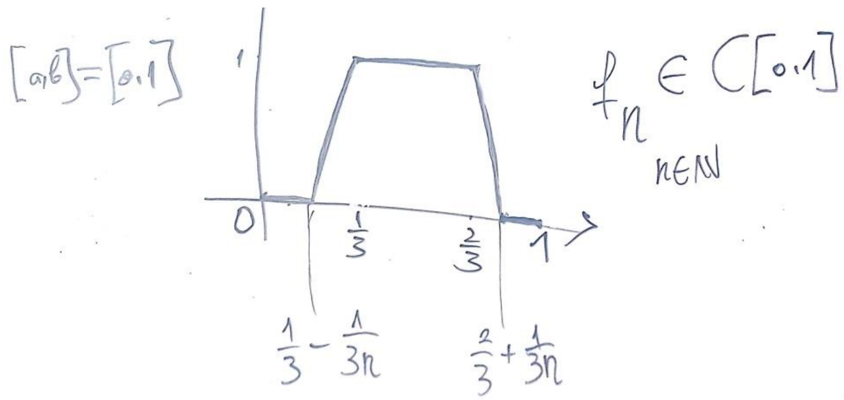
<u>משפט</u>: כל מ"מ קומפקטי הוא שלם.

<u>הוכחה:</u>

- לכל ס"ק (סדרת קושי) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ יש ת"ס מתכנסת (הגדרת "קומפקטיות סדרתית").
- אם לס"ק יש ת"ס מתכנסת, אז גם ס"ק נתונה היא מתכנסת (תירגול).

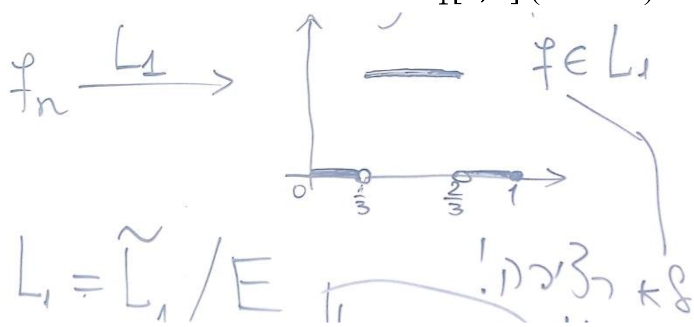
<u>דוגמה 3:</u> $L_1[a,b] \underset{\text{השלמה}}{\hookleftarrow} (C[a,b],d_1)$, כאשר $L_1[a,b]$ פונקציות אינטגרביליות.

$(C[a,b],d_1)$ לא שלם!



(f_n) ס"ק ב- $(C[a,b],d_1)$ אבל לא מתכנסת ב - $(C[a,b],d_1)$.

כן מתכנס במרחב (גדול יותר) $L_1[a,b]$:



כאשר: $E=\left\{f \,\middle|\, \int_a^b |f|dx=0\right\}$.

$\widetilde{L_1}$ מרחב פסאודו-נורמי ! (אומרים גם סמי-נורמי). $L_1[a,b]=\widetilde{L_1}\,/E$ מרחב המנה והוא מרחב בנך של פונקציות אינטגרביליות על $[a,b]$.

4) $L_2[a,b] \underset{\text{השלמה}}{\hookleftarrow} (C[a,b],d_2)$. מקבלים מרחב הילברט.

<u>הגדרה:</u> A נקראת קבוצה **סגותה** (clopen) אם $\begin{cases} A \text{ פתוחה} \\ A \text{ סגורה} \end{cases}$

<u>דוגמאות:</u>

1) $A=(0,1)$ פתוחה ולא סגורה ב - $X=\mathbb{R}$.

2) $A=[0,1]$ סגורה ולא פתוחה ב - $X=\mathbb{R}$.

3) $A=[0,1)$ לא סגורה ולא פתוחה ב - $X=\mathbb{R}$.

4) $\mathbb{R},\emptyset$ סגוחות ב - $\mathbb{R}$.

<u>**הערה:**</u> לכל מרחב (X,d) – תת קבוצות $X,\emptyset$ תמיד סגוחות (כי $X=\varnothing^c$, $\varnothing=X^c$).

השאלה: מתי יש סגוחות נוספות לא טריוויליות ?

<u>**הגדרה:**</u> מרחב (X,d) נקרא **קשיר** ($connected$) אם קבוצות סגוחות במרחב הן **רק** $X,\emptyset$.

<u>הגדרה שקולה להיות **לא קשיר**:</u> אם קיים פירוק $X=X_1 \dot{\cup} X_2$ כך ש –

$$\begin{cases} X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset \\ X_1, X_2 \in top(d) \ (\text{פתוחות}) \\ X_1 \cap X_2 = \emptyset \end{cases}$$

(שימו לב ש X_1, X_2 <u>סגוחות</u> לא טריוויאליות)

<u>**למשל:**</u> אם: $\underbrace{X}_{\text{כתת מרחב}} = [2,4) \cup (5,\infty) \subset \mathbb{R}$

אז X **לא קשיר**. שימו לב ש $(5,\infty)$ **סגוחה** ב X (לא ב $\mathbb{R}$).

דומה עבור $[2,4)$ (למשל 2 נק' פנימית ב $[2,4)$ כי $B_{\frac{1}{2}}(2)=[2,2.5)\subseteq[2,4)$).

עוד דוגמה: מרחב מטרי של רציונליים $\mathbb{Q}$ (כתת מרחב בממשיים) לא קשיר.

יש אינסוף ת"ק סגוחות ובהתאם יש אינסוף "פירוקים טופולוגיים". למשל:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$X_1 = \left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cap \mathbb{Q}$$

$$X_2 = \mathbb{Q} \cap \left(\sqrt{2}, \infty\right)$$

תרגיל: הוכיחו שמרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ (עם מטריקה p –אדית) הוא לא קשיר.

<u>**לסקרנים:**</u>

א. על מרחבים מטריים וטופולוגיה שלהם https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_space

ב. הל מרחבים שלמים https://en.wikipedia.org/wiki/Complete_metric_space#Completion

ג. על המרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$, השלמתו ("שלמים p-אדיים")

https://en.wikipedia.org/wiki/P-adic_number

http://www.nt.th-koeln.de/fachgebiete/mathe/knospe/p-adic/

הרצאה 4

קודם כל תזכורת לגבי הקומפקטיות מהרצאה 2:

<u>**משפט:**</u> כל מ"מ קומפקטי הוא שלם.

<u>**הוכחה מהירה:**</u>

לכל ס"ק (סדרת קושי) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ יש ת"ס מתכנסת ("קומפקטיות סדרתית").

אם לס"ק יש ת"ס מתכנסת, אז גם ס"ק נתונה היא מתכנסת.

עכשיו נכיר הגדרה חדשה שעוזרת להבין את הקומפקטיות.

<u>**הגדרה:**</u> (חסימות כליל)

נניח נתון $\varepsilon>0$. תת קבוצה A במרחב (X,d) נקראת ε**-צפופה** אם לכל $x\in X$ קיים $a\in A$ כך ש $d(a,x)<\varepsilon$.

(אומרים ש: a מקרב את x עד כדי ε)

הגדרה שקולה: $\bigcup_{a\in A} B_\varepsilon(a)=\mathrm{X}$

<u>**הגדרה:**</u> מ"מ (X,d) נקרא **חסום כליל** (totally bounded) אם :

לכל $\varepsilon>0$ נתון קיימת תת קבוצה <u>**סופית**</u> A_ε שהיא ε-צפופה ב (X,d).

<u>**הגדרה:**</u> תת קבוצה Y במ"מ (X,d) נקראת חסומה כליל אם מרחב (Y,d_Y) ח"כ.

דוגמה: $\mathrm{X}=\mathbb{R}\supset[0,1]=\mathrm{Y}$, אז ת"ק $\mathrm{A}_{\frac{1}{n}}=\{\frac{i}{n}:i\in\{0,1,\cdots,n\}\}$ היא $\frac{1}{n}$-צפופה ב Y

תרגיל: ב $\mathrm{Y}=[0,1]\times[0,1]$ למצוא ת"ק שהיא $\frac{1}{100}$-צפופה.

<u>**משפט:**</u> אם מרחב מטרי (X,d) קומפקטי אז הוא חסום כליל.

<u>**הוכחה:**</u> לכל $\varepsilon>0$ נתון לכיסוי פתוח $\bigcup_{a\in X} B_\varepsilon(a)=\mathrm{X}$ יש תת כיסוי סופי.

(כאן משתמשים בקומפקטיות "במובן הכיסויים": לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי סופי)

דוגמה: (X,d_Δ) תמיד חסום אבל לא ח"כ עבור X אינסופית.

<u>תכונות:</u>

- מרחב חסום כליל הוא תמיד חסום (אבל לא תמיד ההפך).

* (תושתיות) אם (X,d) חסום כליל אז גם כל תת קבוצה ח"כ.
* איחוד **סופי** של תת קבוצות שכל אחת ח"כ גם ח"כ.
* אם תת מרחב מטרי (Y,d_Y) של מ"מ (X,d) ח"כ אז גם הסגור $cl(Y)$ ח"כ.

הגדרה: תת קבוצה Y במרחב X נקראת צפופה אם $cl(Y)=X$.

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שתנאים הבאים שקולים:

1. תת קבוצה Y צפופה ב (X,d).
2. תת קבוצה Y ε-צפופה ב (X,d) לכל $0<\varepsilon$.
3. $d(x,Y)=0 \quad \forall x\in X$.

<u>דוגמה</u>: $Y=\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ חסום אבל לא ח"כ (ולא קומפקטי) ב $X=l_2$.

<u>תרגיל:</u> תנו דוגמאות של מ"מ ח"כ שהוא לא קומפקטי.
<u>Spoiler</u>: מ"מ הוא קומפקטי אם"ם הוא ח"כ ושלם (משפט שנוכיח בהמשך).

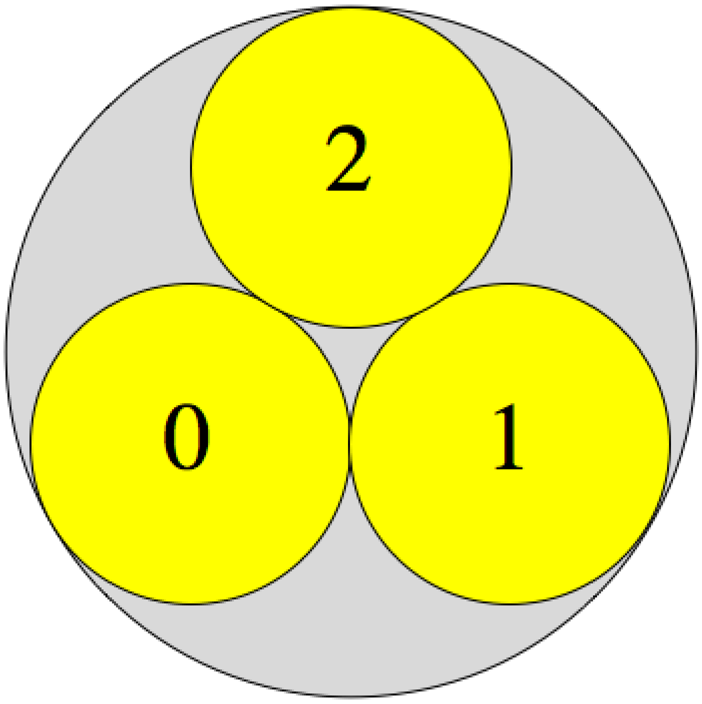
<u>תזכורת</u>: השלמה $\left(\overline{\mathbb{Z}},\overline{d_p}\right) \hookleftarrow \left(\mathbb{Z},d_p\right)$ כאשר:

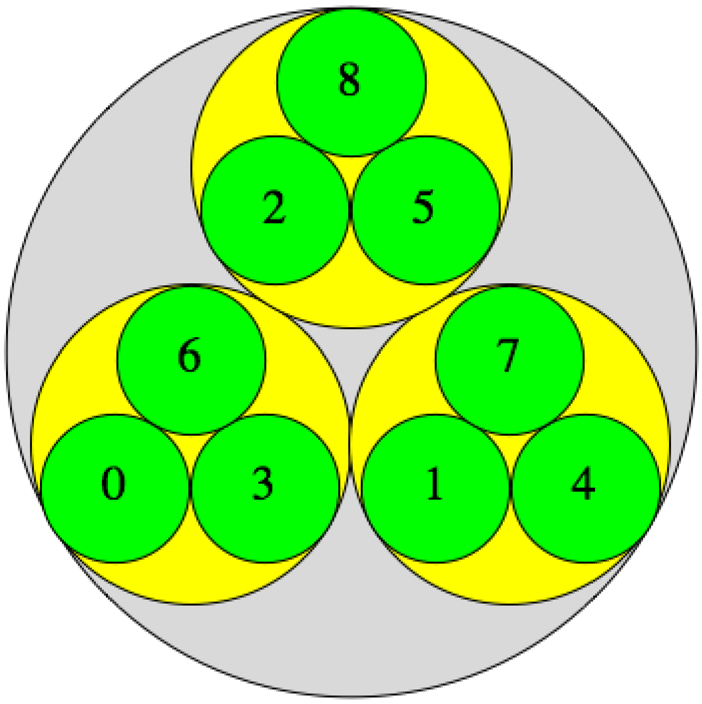
$$\overline{\mathbb{Z}}=\{\text{מספרים } p-\text{אדיים}\}=\left\{\sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k\,,b_k\in\underbrace{\{0,1,\dots,p-1\}}_{p \text{ שאריות מודולו}}=\mathbb{Z}_p\right\}$$

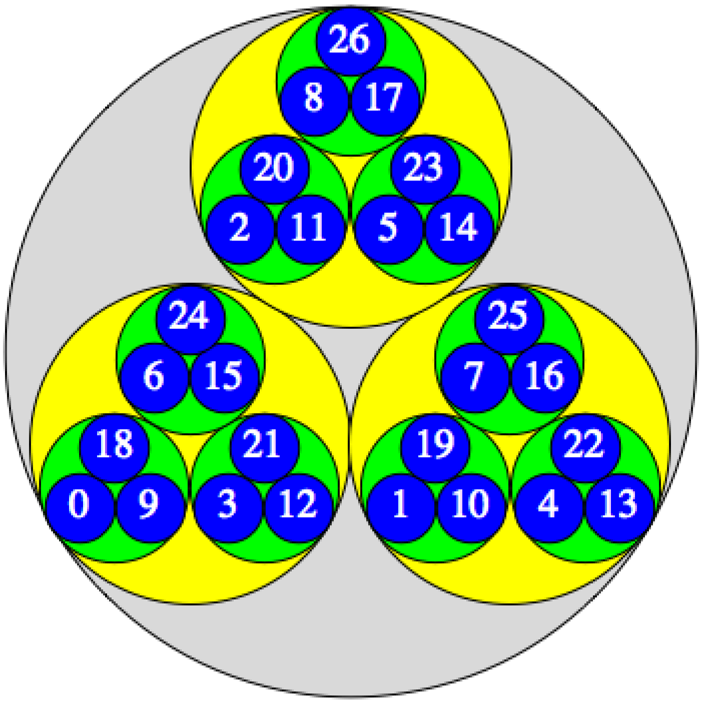
שהוא גם קומפקטי (ראו את הממשפט מ Spoiler !)

<u>תרגיל:</u> הוכיחו שמ"מ $(\mathbb{Z},d_p)$ חסום כליל ולא קומפקטי.

<u>הסבר מקוצר:</u> לא קומפקטי כי המרחב לא שלם. למשל הסדרה
$a_n=1+p+p^2+\cdots+p^n$ היא ס"ק אבל לא מתכנסת (תרגול).
רמז לגבי ח"כ: תת קבוצה $\{0,1,\cdots,p^k-1\}$ היא ε-צפופה עבור $\varepsilon=?$
ראו תמונות במקרה של $p=3$


2
0
1


8
2
5
6
7
0
3
1
4



ת"ק $\{0\}$ ε-צפופה לכל $1<\varepsilon$

ת"ק $A:=\{0,1,2\}$ ε-צפופה לכל $\frac{1}{3}<\varepsilon$

הסבר: שאריות מודולו 3 הן בדיוק $A=\{0,1,2\}$.

לכן לכל $x\in\mathbb{Z}$ קיים $a\in A$ כך ש $3|(x-a)$. מכאן $d_3(x,a)\le\frac{1}{3}$.

. . .

<u>שאלה</u>: כיצד אפשר לדמיין את האיברים של ההשלמה $(\overline{\mathbb{Z}},\overline{d_p})$ לפי התמונות הנ"ל ?

<u>מרחבים טופולוגיים</u>

<u>הגדרה:</u> תהי X קבוצה לא ריקה. אוסף תת הקבוצות $\tau\subseteq P(X):=\{A|A\subseteq X\}$ נקרא **טופולוגיה על קבוצה X** אם מתקיימים התנאים הבאים:

t_1) $\emptyset,X\in\tau$.

t_2) (חיתוכים סופיים) $O_i\in\tau$ עבור $i\in\{1,2,\dots,n\}$ $\Leftarrow$ $O_1\cap O_2\cap\ldots\cap O_n\in\tau$

(מספיק עבור $n=2$).

t_3) (איחודים) $O_i\in\tau$ עבור $i\in I$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau$.

אם מתקיימים הנ"ל, אז נאמר ש - (X,τ) הוא **מרחב טופולוגי** $(Topological\ space)$ ונרשום בקיצור מ"ט.

<u>הגדרות נוספות:</u>

א) אומרים ש - $A \subseteq X$ היא תת קבוצה **פתוחה** (במ"ט (X,τ)) אם –

$$\boxed{A \text{ פתוחה} \overset{def}{=} A \in \tau}$$

ב) תת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת קב' **סגורה** (במ"ט (X,τ)) אם המשלים פתוחה, ז"א –

$$\boxed{A \text{ סגורה} \overset{def}{=} A^c \text{ פתוחה}}$$

<u>דוגמאות:</u>

1) לכל מרחב פסאודו-מטרי (X,d): $\quad \big(X, top(d)\big)$ מרחב טופולוגי (לבדוק!).

כאשר $top(d) = \{d \text{ קבוצות פתוחות במובן}\}$.

<u>הגדרה:</u> אומרים שמ"ט (X,τ) הוא **מטריזבילי** אם קיימת מטריקה d כך ש $\boxed{\tau = top(d)}$

באופן דומה אפשר להגדיר: מרחב טופולוגי **פסאודו-מטריזבילי**

<u>משפט (תכונות בסיסיות של קבוצות סגורות):</u> לכל מ"ט (X,τ) מתקיים:

t_1^c) $X, \emptyset$ סגורות.

t_2^c) איחוד <u>סופי</u> של קבוצות סגורות הוא סגור.

t_3^c) כל חיתוך קב' סגורות שוב סגור.

<u>הוכחה:</u> כללי $de\ Morgan \wedge$ הגדרת TOP.

2) "טופולוגיה טריוויאלית": $\tau_{tr} \coloneqq \{\emptyset, X\}$. $\quad (X, \tau_{tr})$ **מרחב טריוויאלי**.

<u>הערה:</u> מ"ט (X,τ_{tr}) תמיד פסאודו-מטריזבילי: כי $\tau_{tr} = top(d_0)$. כאשר $d_0(x,y) = 0$.

3) "**טופולוגיה דיסקרטית**": $\quad \tau_{discr} \coloneqq P(X) = \{X - \text{תת קבוצות ב}\}$

(כאן כל תת קבוצה היא פתוחה)

<u>שימו לב:</u> בין היתר, כל נקודון $\{x\}$ קבוצה פתוחה (שקול לדיסקרטיות בגלל t_3).

<u>הגדרה:</u> נקודה a במרחב טופולוגי (X,τ) נקראת **מבודדת** $(isolated)$ אם $\{a\} \in \tau$ (פתוח!).

<u>לכן:</u> מרחב טופולוגי הוא דיסקרטי $\Leftrightarrow$ כל נקודה מבודדת בו.

<u>הערה:</u>

מרחב דיסקרטי הוא תמיד מטריזבילי. $\tau_{discr} = top(d_\Delta)$ (d_Δ מטריקת 0-1).

<u>הערה:</u> לכל טופולוגיה τ מתקיים: $\{\emptyset, X\} = \tau_{tr} \subseteq \tau \subseteq \tau_{discr} = P(X)$

<u>הגדרה:</u> נניח $\tau_1 \subseteq \tau_2$ 2 טופולוגיות על אותה קבוצה X. אז אומרים ש - τ_2 **חזקה** יותר מ - τ_1, ואומרים ש - τ_1 **חלשה** יותר מ - τ_2.

4) $X = \{0,1\}$ ונגדיר – $\tau_{\leq} := \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ טופולוגית Sierpinski

$\{0\}$ מבודדת, $\{1\}$ <u>לא</u>.

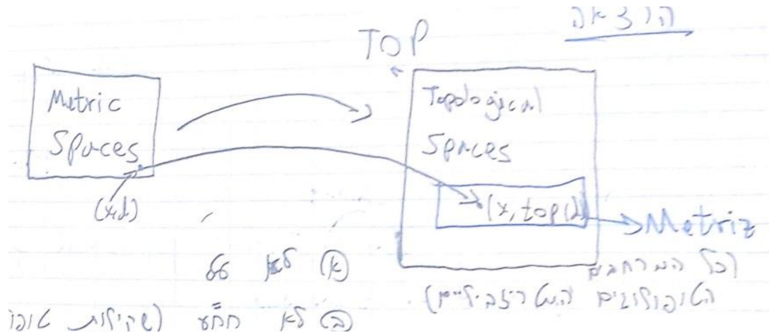
<u>הגדרה (תת מרחב טופולוגי):</u> יהי $(X, \tau) \in TOP$, $\emptyset \neq Y \subseteq X$.

מגדירים **טופולוגית תת מרחב** מעל Y:

$$\tau_Y := \{O \cap Y | O \in \tau\}$$

תבדוקו ש - $(Y, \tau_Y) \in TOP$.

<u>הערה:</u>

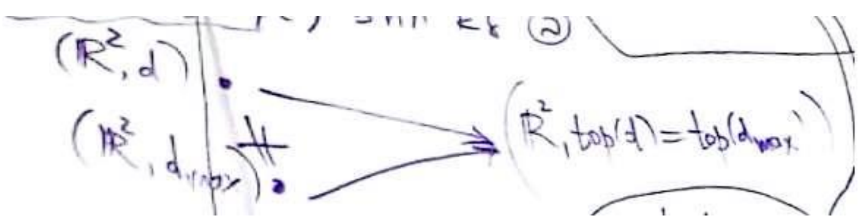


$$\{metric\ spaces\} = Metr \to TOP = \{topological\ spaces\},\ (X,d) \mapsto (X, top(d))$$

א) לא על.

ב) לא חח"ע.

<u>הסבר ב':</u> (שקילות טופולוגית של מטריקות)



<u>הסבר א':</u> שקול להגיד, שלא כל מ"ט הוא מטריזבילי.

דוגמה:

$X \coloneqq \{0,1\}$. $(X,\tau_{\le})$ מ"ט אבל לא מטריזבילי (אפילו לא פסאודו-מטריזבילי!)..

$$\tau_{\le} = \left\{\underbrace{\emptyset,\{0\},\{0,1\}}_{\text{פתוחות}}\right\}. \qquad \left\{\underbrace{\{0,1\},\{1\},\emptyset}_{\text{סגורות}}\right\}$$

<u>הסבר:</u>

נניח בשלילה שיש פסאודו-מטריקה ρ על $\{0,1\}$ כך ש – $top(\rho) = \tau_{\le}$.

<u>הסבר קצר שהמרחב לא מטריזבילי:</u> $(\{0,1\},\tau_{\le}) \notin Metriz$

נקודון $\{0\}$ לא קבוצה סגורה! מצד שני, בכל מ"מ, כל נקודון סגור!

נוכיח ש - $(\{0,1\},\tau_{\le})$ לא פסאודו-מטריזבילי – נניח בשלילה ש

<u>2 מקרים:</u>

1) $\rho(0,1) = 0$ ואז $\rho = d_0$. מצד שני, $\tau_{\le} \neq top(d_0) = \{\emptyset,\{0,1\}\}$.

2) $\rho(0,1) > 0$. כאן – $\tau_{\le} \subsetneq top(\rho) = \{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$

כי כל הנק' מבודדות ולכן המרחב הוא דיסקרטי.

5) "טופולוגיה קו-סופית":

לכל קב' $X \neq \emptyset$ נגדיר – $\underbrace{\tau_{cof}}_{cofinite} \coloneqq \{F^c : F \subseteq X \text{ סופית}\} \cup \{\emptyset\}$

לבדוק: (τ_{cof},X) מ"ט אבל לא תמיד מטריזבילי (תלוי בעוצמה של X).

<u>הערה:</u>

$$(\mathbb{R},\tau_{cof}) = \{F^c \subseteq \mathbb{R} \mid F \subset \mathbb{R} \text{ סופית}\} \cup \{\emptyset\} \notin Metriz$$

<u>רמז:</u> לנקודות שונות אין "סביבות" פתוחות זרות.

<u>הגדרות:</u>

יהי (X,τ) מ"ט.

1) תת קבוצה $V \subseteq X$ נקראת **סביבה לנק'** $\boldsymbol{a \in X}$ אם קיימת קבוצה פתוחה O $(\in \tau)$

כך ש – $a \in O \subseteq V$.

נסמן – $V \in N(a)$, כאשר $N(a)$ סביבות של a.

אומרים **סביבה פתוחה** אם V פתוחה.

<u>אזהרה:</u> <u>סביבה</u> לא חייבת להיות פתוחה.

2) באופן דומה נגדיר **סביבה $\boldsymbol{V}$ לתת קבוצה $\boldsymbol{A \subseteq X}$** אם –

$$\exists O \in \tau: A \subseteq O \subseteq V$$

3) אומרים שנקודה a היא **נק' פנימית** של קבוצה $A \subseteq X$ אם $A \in N(a)$.

הסימון: $a \in int(A)$ או $a \in A^{\circ}$.

בעצם זה מגדיר את ה"פנים" של A: $int(A)$ (כאוסף של נקודות פנימיות).

הערה: תמיד $int(A) \subseteq A$.

טענה: $int(A) = A \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{קריטריון לפתיחות}}$ A פתוחה ($A \in \tau$).

רמז: שימוש ב t_3 .

הגדרה: X מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת T_2), כלומר: $X \in T_2$

אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות $\underbrace{(\text{פתוחות})}_{\text{בה"כ}}$ זרות.

הגדרה:

4) **הסגור - $closure$**: עבור $A \subseteq X$ נגדיר:

$$z \in cl(A) = \bar{A} \overset{def}{=} \forall V \in N(z): V \cap A \neq \emptyset$$

$z \in cl(A)$ "הנקודות הכי קרובות" ל $- A$.

הערה: תמיד $A \subseteq cl(A)$.

תרגיל: $A = cl(A) \Leftrightarrow A$ סגורה.

הערה חשובה: הרבה הגדרות במ"ט מתקבלות מהגדרות על מ"מ כשמחליפים ε-סביבות בסביבות.
למשל: התכנסות סדרות, רציפות פונקציות, ...

התכנסות סדרות:

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} X \quad n \longmapsto f(n) = x_n$$

לסדרה x_n במ"ט (X,τ) מגדירים גבול (אם קיים!) באופן הבא:

אומרים ש - $a \in X$ **גבול** של סדרה $x_n \in X$ אם לכל סביבה (פתוחה) U של a

כמעט כל האיברים נמצאים בסביבה U. ז"א

$$\forall U \in N(a) \exists n_0 \in N(a):\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U \qquad (n_0 \text{ תלוי בסביבה } U)$$

סימון: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ או $x_n \xrightarrow{\tau} a$.

<u>רציפות פונקציות:</u>

נייח $(X,\tau),(Y,\sigma)$ מ"ט. פונקציה $f:X\to Y$ נקראת רציפה *בנקודה* $a\in X$ אם:

$$\forall U\in N(f(a))\,\exists V\in N(a)\ \ f(V)\subseteq U$$

אומרים *רציפה* אם היא רציפה בכל נקודה $a\in X$. סימון: $f\in C(X,Y)$.

<u>הערה:</u> (כמו במ"מ) פונקציה $(Y,\sigma)\xleftarrow{f}(X,\tau)$ בין 2 מ"ט **רציפה** אם"ם

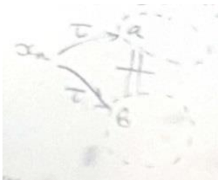
$$\boxed{\forall O\in\sigma: f^{-1}(O)\in\tau}$$

ז"א מקור לפתוח הוא פתוח (ניתן לנסח עבור סגור). נוכיח בהמשך.

<u>משפט:</u> (יחידות הגבול) במרחב טופולוגי (X,τ) עם תכונה T_2 $(Hausdorff)$, גבול של סדרה תמיד יחיד (אם קיים!).

<u>הוכחה:</u>

נניח בשלילה ש – $\begin{cases} a\neq b \\ X\in T_2\end{cases}$



$\Leftarrow$ קיימות <u>סביבות זרות</u> $U\in N(a),V\in N(b)$ כך ש - $U\cap V=\emptyset$.

U מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה x_n, <u>וגם</u> V מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה ..

סתירה!

■

<u>הגדרה:</u> $A\subseteq X$. נגדיר את **הסגור הסדרתי** לפי:

$$z\in scl(A)\overset{def}{=}\forall n\in\mathbb{N},\exists a_n\in A: a_n\xrightarrow{\tau} z$$

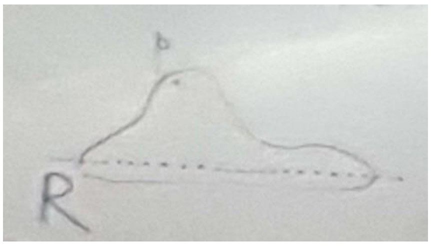
- תמיד $A\subseteq scl(\mathrm{A})$ (רמז: סדרות קבועות)
- **<u>טענה:</u>** במ"ט תמיד $scl(\mathrm{A})\subseteq cl(\mathrm{A})$.

<u>הוכחה:</u> נניח $z\in scl(A)$. אז קיימת סדרה $a_n\in A$ שמתכנסת (במרחב X) ל z.
לכל סביבה $U\in N(z)$ כמעט כל האיברים של a_n נמצאים ב U. אז ברור $U\cap A\neq\emptyset$.
לכן $z\in cl(A)$.

☺

- הערה חשובה: אבל **<u>לא תמיד</u>** יש שוויון $scl(\mathrm{A})=cl(\mathrm{A})$

דוגמה: נגדיר $X \coloneqq \mathbb{R} \cup \{p\}\,, p \notin \mathbb{R}$



$$\tau \coloneqq \{O \subseteq X | p \in O \Rightarrow |O^c| \leq \aleph_0\}$$

ז"א אם $p \in O$, אז המשלים O^c הוא בן מנייה.

לבדוק:

- $(X,\tau) \in TOP$ (לבדוק גם T_2).
- שימו לב: תת מרחב טופולוגי $Y \coloneqq (\mathbb{R}\,, \tau_Y)$ של מ"ט הנ"ל נקבל $\mathbb{R}$ עם טופולוגיה <u>דיסקרטית</u>. ז"א $\tau_Y = P(\mathbb{R}) = \tau_{discr}$.
- לבדוק $\mathbb{R} = scl(\mathbb{R}) \neq \mathrm{cl}(\mathbb{R}) = \mathrm{X}$
- אם סדרה a_n מתכנסת ב (X,τ) אז היא קבועה לבסוף
- $id : (X,\tau) \rightarrow (X,\tau_{discr})$ שומרת על התכנסות סדרות אבל לא רציפה !
- $(X,\tau) \notin Metriz$

<u>אקסיומות הפרדה נוספות</u>:

<u>הגדרות:</u> נניח $A \subseteq X$, $B \subseteq X$. אומרים:

א) קיימת **הפרדה סביבתית** של A, B (במ"ט (X,τ)) אם –

$$\exists\, U \in N(A), V \in N(B) \colon U \cap V = \emptyset$$

(ז"א אם קיימות סביבות $(\underbrace{\text{פתוחות}}_{\text{בה"כ}})$ זרות).

ב) קיימת **הפרדה פונקציונלית** במובן $Urysohn$ אם:

$$\exists f \in C(X,[0,1]) \colon f(A) = 0, f(B) = 1$$

טענה: מהפרדה פונקציונלית נובעת  הפרדה קבוצתית.

הוכחה:

ניקח סביבות פתוחות זרות של 0,1 ב - [0,1].

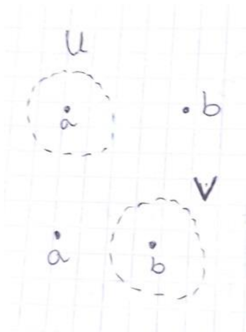
$$\underbrace{U \coloneqq \left[0,\frac{1}{3}\right)}_{0\in} \cap \underbrace{V \coloneqq \left(\frac{2}{3},1\right]}_{1\in} = \emptyset$$

$$\underbrace{f^{-1}(U)}_{\in N(A)} \cap \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in N(B)} = \emptyset$$

ומצאנו הפרדה סביבתית של A,B .

■

הגדרה: X מקיימת **תכונה T_0**, כלומר: $(X,\tau) \in T_0$ $(Kolmogorov)$ – אם לכל 2 נקודות שונות $a \neq b$ מתקיים לפחות אחד מהתנאים הבאים:



1) $\exists U \in N(a) : b \notin U$

או

2) $\exists V \in N(B) : a \notin V$

הגדרה: X מקיימת **תכונה T_1**,

כלומר: $X \in T_1$ – אם מתקיימים שתי התנאים מקודם ((1) + (2)).

תרגיל: התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in T_1$

2) כל נקודון סגור.

3) כל תת קבוצה סופית F היא סגורה. (רמז: (t_2^c))

הערה:

תמיד $(X,\tau_{cof}) \in T_1$, בעצם τ_{cof} טופולוגיה הכי קטנה על X שמקיימת את תכונה T_1.

<u>הגדרה (תזכורת)</u>: X מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת T_2), אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות.

<u>הגדרה:</u> X מקיימת **תכונה T_3**, כלומר: $X \in T_3$, אם מתקיימים שני תנאים:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה $a \notin B$ B יש הפרדה סביבתית.

<u>הערה:</u> $T_3 \subset T_2 \subset T_1 \subset T_0$ (רמז: ניקח נקודון $B := \{b\}$ ...)

<u>הערה:</u>

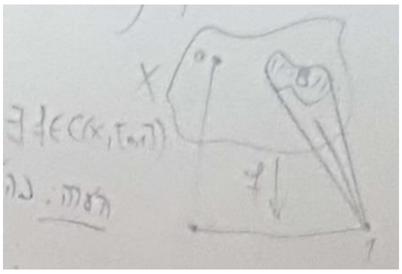
אומרים גם: $Regular\ spaces = T_3$, ולעיתים $Regular = T_3$(ב)

<u>הגדרה:</u> X מקיימת **תכונה $T_{3\frac{1}{2}}$**, כלומר: $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, אם:

(א) $X \in T_1$.

^{f}(ב) לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה $a \notin B$ B קיימת הפרדה פונקציונלית.

<u>הערה:</u> מהטענה $\Leftarrow$ $T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}}$.



<u>הערה:</u>

1) $T_{3\frac{1}{2}}$ אומרים גם תכונת Tychonoff.

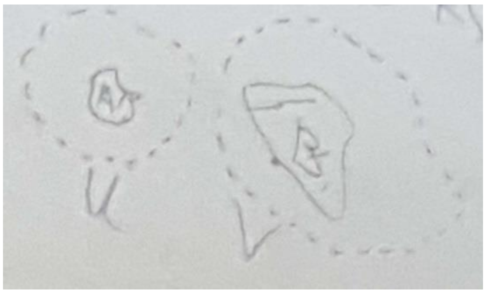
2) לעיתים על $T_{3\frac{1}{2}}$^{f}(ב) *אומרים* – Completely Regular = *רגולרי לחלוטין*.

<u>הגדרה:</u> X מקיימת **תכונה T_4**, כלומר: $X \in T_4$, אם:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל 2 קבוצות סגורות וזרות $A \cap B = \emptyset$, יש סביבות (פתוחות) זרות.

(כלומר $\exists\, U \in N(A), \exists\, V \in N(B): U \cap V = \emptyset$).



<u>**הערה:**</u>

1) לעיתים אומרים $Normal\ Space$ = מרחב נורמלי.

2) ולעיתים אומרים נורמלי על T_4(ב) בלבד.

<u>**הערה:**</u> לא קל להבין מדוע – $X \in T_4 \Rightarrow X \in T_{3\frac{1}{2}}$

נובע מהמשפט הבא:

<u>**משפט $\boldsymbol{Urysohn}$:**</u> $T_4^f = \mathrm{T}_4$.

יהי $X \in T_4$. אז מתקיים $X \in T_4^f$. ז"א לכל זוג A, B קבוצות <u>סגורות</u> <u>זרות</u> קיימת הפרדה פונקציונלית של A, B.

<u>**הערה:**</u> בהמשך נוכיח דרך $"Onion\ Argument"\ of\ Urysohn$.

<u>**הערה:**</u> $TOP \supset T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}} \supset T_4$

Spoiler : בהמשך נוכיח $T_4 \supset Metriz$ $\quad T_4 \supset Comp \cap T_2$

<u>**הערה:**</u>

לכל ההכלות הנ"ל, יש דוגמאות נגדיות (הן הכלות **ממש**).

ראו קובץ באתר של המרצה - $Separation\ Axioms$.

1) $(\{0,1\}, \tau_{tr}) \in Top$
$(\{0,1\}, \tau_{tr}) \notin T_0$

2) $(\{0,1\}, \tau_{\leq}) \in T_0$

$(\{0,1\}, \tau_{\leq}) \notin T_1$

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \in T_1$

$(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \notin T_2$

כאשר: $\tau_{cof} \coloneqq \{F^c | \text{סופית } F \subseteq \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$

<u>**הערה:**</u> $(X, \tau_{cof}) \notin T_2$ לכל X <u>אינסופית</u>.

בעצם זה לכל 2 קבוצות פתוחות לא ריקות.

$U, V \in \tau_{cof}$ מתקיים $U \cap V \neq \emptyset$ כי –

$U \coloneqq F_1^c, V \coloneqq F_2^c$

ולכן – $\emptyset \underbrace{=}_{\text{אם נניח}} U \cap V = F_1^c \cap F_2^c = (F_1 \cup F_2)^c$

אז – $X = \underbrace{F_1 \cup F_2}_{\text{סופית}}$

בסתירה!

■

<u>הגדרות:</u> נניח (X, τ) מ"ט.

א) $X = X_1 \cup X_2$ נקרא **פירוק טופולוגי** אם:

$$\begin{cases} X_1 \cap X_2 = \emptyset \\ X_1, X_2 \text{ פתוחות} \\ \text{לא ריקות} \end{cases}$$

לתנאי השני שקול – סגורות, וגם שקול – **סגוחות** (ז"א סגור+פתוח).

ב) אומרים (X, τ) **קשיר** $(Connected)$ ונסמן: $(X, \tau) \in Conn$ אם **לא** קיים פירוק טופולוגי ל- X.

<u>הערה</u>: (X, τ) **לא קשיר** אם ורק אם קיימת תת קבוצה סגוחה לא ריקה ששונה מ X.

<u>הגדרה:</u> נניח $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2) \in TOP$ כך ש - $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset$.

מגדירים **סכום טופולוגי** $X = X_1 \sqcup X_2$ <u>כקבוצה</u> $X = X_1 \cup X_2$ עם <u>טופולוגיה</u> הבאה

$$\tau := \{O_1 \cup O_2 | O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$$

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שמרחב הסכום תמיד לא קשיר.

הרצאה 5

<u>תכונות (int, cl , ∂ ,סביבות):</u> במ"ט (X, τ)

1) $\forall\, a \in X: X \in N(a)$ (<u>רמז:</u> t_1).

2) חיתוך **סופי** של סביבות (פתוחות) גם סביבה (פתוחה). <u>רמז:</u> t_2.

3) $V \in N(a) \Leftarrow \begin{cases} U \in N(a) \\ V \supseteq U \end{cases}$

4) $\boxed{\underbrace{int(A)}_{A^\circ} \subseteq A \subseteq \underbrace{cl(A)}_{\bar{A}}}$.

5) לכל $A_1 \subseteq A_2$ מתקיים:

$int(A_1) \subseteq int(A_2)$

$cl(A_1) \subseteq cl(A_2)$

$scl(A_1) \subseteq scl(A_2)$

6) קריטריון לפתיחות : $\boxed{A \text{ פתוחה } \Leftrightarrow int(A) = A}$

רמז: t_3. $A = \bigcup_{a \in A} O_a$

7) קריטריון לסגירות: $\boxed{A \text{ סגורה } \Leftrightarrow cl(A) = A}$

8) $A^{\circ\circ} = A^{\circ}$. (ז"א: $\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A)$)

9) $A^{\circ} \in \tau$ (ז"א A° תמיד פתוחה).

10) $\boxed{(A_1 \cap A_2)^{\circ} = A_1^{\circ} \cap A_2^{\circ}}$ (לכל מספר **סופי**).

11) A° = קב' פתוחה הכי גדולה בין תת קבוצות פתוחות של A, כלומר –

$\bigcup \{O \subseteq X | O \subseteq A, O \in \tau\}$

12) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ (ז"א $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$)

13) $\bar{A}$ תמיד קב' סגורה.

14) $\bar{A}$ = קב' סגורה הכי קטנה בין קבוצות סגורות שמכילות את A, כלומר –

$\bigcap \{B \subseteq X \big| B \supseteq A, B \text{ סגורה ב } X - \}$

15) (הפרשים) נניח O פתוחה, B סגורה. אזי:

א. $O \setminus B$ פתוחה. ב. $B \setminus O$ סגורה.

<u>הסבר:</u> $O \setminus B = O \cap B^c$ $B \setminus O = B \cap O^c$.

16) <u>**משפט הקשר**</u> בין הסגור והפנים. תמיד מתקיים:

א. $\boxed{cl(A^c) = \left(int(A)\right)^c}$

שקול: ב. $int(A^c) = \left(cl(A)\right)^c$

<u>הוכחה:</u> א $\Leftrightarrow$ ב כי נוכל להציב $A \coloneqq A^c$. <u>מ"ל (א)</u>

$x \in \left(int(A)\right)^c$

$\Updownarrow$

$x \notin int(A)$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, U \in N(x) : U \not\subseteq A$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, U \in N(x) : \ U \cap A^c \neq \emptyset$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in cl(A^c)$$

☺

17) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ (לכל מס' **סופי**).

<u>**הגדרה:**</u> ***השפה של A***: $\partial(A) := \overline{A} \setminus A^{\circ}$

18) $\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}$.

<u>הסבר:</u> $\partial(A) = \overline{A} \setminus A^{\circ} = \bar{A} \cap (A^{\circ})^c \underbrace{=}_{16.1} \bar{A} \cap \overline{A^c}$

19) $\partial(A)$ תמיד סגורה!

<u>הסבר:</u> כחיתוך של קבוצות סגורות (ראו 18).

20) $\boxed{\partial(A) = \partial(A^c)}$

21) (במ"מ (X,d)) $\partial(A) = \{x \in X | d(x,A) = 0, d(x,A^c) = 0\}$

<u>הסבר:</u> תכונות הסגור במ"מ.

<u>**הגדרה:**</u> **א.** תת קבוצה A במ"ט (X,τ) נקראת *צפופה* אם $cl(A) = X$.

שקול: לכל קבוצה פתוחה לא ריקה O מתקיים $A \cap O \neq \emptyset$.

ב. מ"ט (X,τ) נקרא ספרבילי אם קיימת ת"ק צפופה <u>ובת מניה</u>. סימון: $(X,\tau) \in \mathrm{Sep}$.

<u>תרגילים מומלצים:</u>

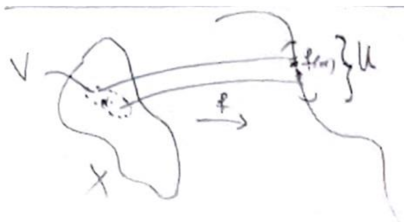
- מרחב טופולוגי בת מניה תמיד ספרבילי.
- $(X,\tau_{discr}) \in \mathrm{Sep}$ אם ורק אם X בת מניה.
- חיתוך של 2 קבוצות פתוחות צפופות גם צפופה.
- יהי (X,d) מ"מ. תת קבוצה צפופה ב $(X,\mathrm{top(d)})$ אם"ם היא ε-צפופה לכל $\varepsilon > 0$.
- אם מ"מ (X,d) הוא חסום כליל אז הוא ספרבילי. ז"א $(X,\mathrm{top(d)}) \in \mathrm{Sep}$.

הסיקו שאם (X,d) קומפקטי אז $(X,\mathrm{top(d)}) \in \mathrm{Sep}$.

* * הוכיחו: $\mathbb{R}^n \in \mathrm{Sep}$ $\quad l_2 \in \mathrm{Sep}$ $\quad l_\infty \notin \mathrm{Sep}$.

רציפות פונקציות: תכונות נוספות

__תזכורת: (רציפות בנקודה):__ נניח שנתונה פו' בין מ"ט $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$. f נקראת **רציפה בנקודה** $\boldsymbol{a \in X}$ אם: $\boxed{\forall\, U \in N\big(f(a)\big)\ \exists\, V \in N(a): f(V) \subseteq U}$



__שקול:__ $\forall\, U \in N\big(f(a)\big): f^{-1}(U) \in N(a)$

(מילולית: מקור של סביבה (ל - $f(a)$) גם סביבה (ל – a)).

__משפט (קריטריון לרציפות):__ נניח $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ פו' בין מ"ט. התנאים שקולים:

1) f רציפה (בכל נקודה).

2) מקור של כל קב' פתוחה גם פתוחה.

3) מקור של כל קב' סגורה גם סגור.

4) $\forall\, A \subseteq X: z \in cl(A) \Rightarrow f(z) \in cl\big(f(A)\big)$.

5) $f\big(cl(A)\big) \subseteq cl\big(f(A)\big)$.

__הוכחה:__

__$(1) \Leftarrow (2)$:__

נניח $O \in \sigma$. צ"ל - $f^{-1}(O) \in \tau$.

לכל $a \in f^{-1}(O)$ צ"ל ש $a \in int\big(f^{-1}(O)\big)$

(קריטריון לפתיחות: A פתוחה $\Leftrightarrow int(A) = A$).

$$a \in f^{-1}(O)$$
$$\Downarrow$$
$$f(a) \in O \in \sigma$$
$$\Downarrow$$
$$O \in N\big(f(a)\big)$$

$\Downarrow$ הגדרת הרציפות בנקודה a

$$a \in f^{-1}(O) \in N(a)$$

הגדרת נקודות פנים$\Downarrow$

$$a \in int\left(f^{-1}(O)\right)$$

<u>$(2) \Leftrightarrow (3)$:</u> כי $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$.

<u>$(4) \Leftrightarrow (5)$:</u> ברור.

<u>נוכיח $(3) \Leftarrow (5)$:</u>

נניח $A \subseteq X$. צ"ל – $f\left(cl(A)\right) \subseteq cl\left(f(A)\right)$.

$$A \subseteq f^{-1}\left(f(A)\right) \subseteq f^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right)$$

המעבר האחרון נובע מזה ש - $f(A) \subseteq cl\left(f(A)\right)$. נפעיל "$cl$" בשני האגפים:

$$cl(A) \subseteq cl\left(f^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right)\right) \overset{(*)}{=} f^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right)$$

(בהפעלת cl יש "מונוטוניות" – $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow cl(A_1) \subseteq cl(A_2)$).

<u>הסבר $(*)$:</u>

א) $cl(B)$ סגור.

ב) נתון (3).

ג) B סגור $\Leftrightarrow cl(B) = B$.

כעת, נפעיל f על שני האגפים לקבל:

$$f\left(cl(A)\right) \subseteq ff^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right) \subseteq cl\left(f(A)\right)$$

<u>נוכיח $(4) \Leftarrow (1)$:</u>

נניח בשלילה ש - (1) לא נכון. ז"א, f לא רציפה בנקודה מסוימת $a \in X$.

ז"א, קיימת <u>סביבה פתוחה</u> U של $f(a)$ כך ש - $f^{-1}(U) \notin N(a)$.

שקול: $a \notin int\left(f^{-1}(U)\right)$

שקול: $cl\left(f^{-1}(U)^c\right) \underbrace{=}_{\text{תכונת הקשר}} \left(int\left(f^{-1}(U)\right)\right)^c \ni a$

בגלל נתון (4) נקבל:

$$f(a) \in cl\left(f\left(f^{-1}(U)^c\right)\right) = cl\left(f\left(f^{-1}(U^c)\right)\right) \subseteq cl(U^c) = U^c$$

(המעבר האחרון נובע כי U פתוחה ולכן Y/U סגורה וסגור של סגורה שווה לעצמה).

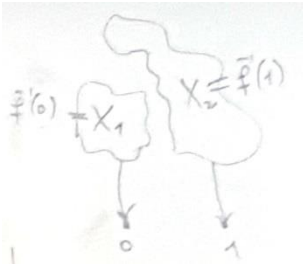
קיבלנו: $f(a)\notin U$ בסתירה לנתון!

☺

משפט: התנאים הבאים שקולים:

1) $(X,\tau)\notin Conn$ (ז"א לא קשיר).

2) קיימת פונקציה רציפה – $X\xrightarrow{f}[0,1]$ כך ש $f(X)=\{0,1\}$



הוכחה: לפי משפט רציפות ש"ל מקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (יש 4 מקרים...)

$$f^{-1}(O)=\begin{cases} X & \{0,1\}\subset O \\ \varnothing & \{0,1\}\cap O=\varnothing \\ X_1 & \{0,1\}\cap O=\{0\} \\ X_2 & \{0,1\}\cap O=\{1\} \end{cases}$$

☺

שימו לב: אין תכונת ערך ביניים! בהמשך זה נותן מחצית ל-"משפט ערך ביניים".

תרגיל: הוכיחו (הכללת המשפט הקודם) נקודות אי-רציפות של פונקציה האופיינית χ_A של $A\subseteq X$ היא $\partial(A)$. כאשר: $\chi_A: X\to\{0,1\},\ \chi_A(a)=1\quad \forall a\in A,\quad \chi_A(\mathrm{x})=0\quad \forall x\notin A$

משפט: ($\text{Heine-}\frac{1}{2}$) כל f רציפה שומרת על התכנסות סדרות.

הוכחה: $x_n\xrightarrow{\tau}a\ \underbrace{\Rightarrow}_{\text{צריך להוכיח}}\ f(x_n)\xrightarrow{\sigma}f(a)$

שקול להוכיח – $\forall\, U\in N\big(f(a)\big)\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}:\forall n\ge n_0: f(x_n)\in U$

עבור $U\in N\big(f(a)\big)$ המקור $f^{-1}(U)\in N(a)$ (בגלל רציפות f בנקודה a).

נתון – $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

וגם ידוע $f^{-1}(U)\in N(a)$ ולכן קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש – $x_n\in f^{-1}(U)$

מכאן – $\forall n\ge n_0: f(x_n)\in U$

☺

הערה חשובה: במ"מ ההיפך גם נכון! (עיקרון $Heine$). אבל זה לא תמיד נכון במ"ט.

דוגמה מתאימה (תזכורת):

$$X\coloneqq\mathbb{R}\cup\{p\},p\notin\mathbb{R}$$

$\tau :=$

$(X,\tau) \in T_2 \qquad \{O \subseteq X | p \in O \Rightarrow |X/O| \leq \aleph_0\}$

(נשים לב ש - $\forall x \neq p: \{x\} \in \tau$).

<u>שימו לב:</u>

1) τ לא דיסקרטית (נק' p לא מבודדת).

2) תת מרחב $\mathbb{R}$ ביחס ל $- \tau$ הוא דיסקרטי.

3) במרחב (X,τ) יש רק התכנסות טריוויאלית של סדרות

(ז"א $x_n \xrightarrow{\tau} a \Leftrightarrow x_n$ קבועה <u>לבסוף</u> $= a$).

<u>הסבר של 3:</u>

מ"ל רק עבור $a = p$ (מדוע? כי כל נקודה אחרת היא מבודדת ואז ניתן לקחת את הנקודה בתפקיד של סביבה ואז מהגדרת התכנסות לפי סביבות).

צריך להוכיח שאם סדרה a_n ב X שואפת ל p אז הסדרה קבועה לבסוף. נסמן

$A := \{a_n : \mathrm{n} \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{R}$. ברור ש A בת מניה. נגדיר $U := X \setminus A$. אז $U \in N(p)$.

מצד שני לפי הגדרת $\lim a_n = p$ כמעט כל האיברים של הסדרה נמצאים ב U.

נזכיר $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ $U \cap A = \varnothing$. לכן כמעט כל האיברים של הסדרה הם p .

נגדיר – $(X,\tau_{discr}) \overset{f=id}{\rightarrow} (X,\tau)$. אז הפונקציה הזאת –

א) לא רציפה

ב) f שומרת על התכנסות

קיבלנו שעיקרון $Heine$ כאן לא מתקיים!

<u>עוד מסקנה:</u> $(X,\tau) \notin Metriz$

(כי בין מרחבים מטריזביליים עיקרון $Heine$, כן תמיד נכון!).

<u>תכונות נוספות של פונקציות רציפות:</u>

- כל $(Y,\sigma) \overset{f}{\rightarrow} (X,\tau_{discr})$ תמיד רציפה.

- כל $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\tau_{tr})$ תמיד רציפה.

- הרכבה $f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3$ של פונקציות רציפות $f_1 : X_1 \to X_2$
  $f_2 : X_2 \to X_3$ היא גם רציפה.

- הוכיחו שבכל במ"ט (X,τ) ולכל $f_1, f_2 \in C(X)$ מתקיים :

א) $f_1 + f_2 \in C(X)$.

ב) $f_1 \cdot f_2 \in C(X)$.

ג) $\frac{f_1}{f_2} \in C(X)$ בתנאי ש - $f_2(x) \neq 0$ לכל $x \in X$.

הערה: נוח לבדוק "דרך סביבות".

<u>**משפט (תורשתיות של רציפות):**</u> $f: X \to Y$ רציפה, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ כך ש - $f(A) \subseteq B$. אזי פונקציה מושרית –

$$\boxed{\begin{array}{c} A \xrightarrow{f_0} B \\ a \longmapsto f(a) \end{array}}$$

גם רציפה.

<u>**הוכחה:**</u>

בודקים לפי קריטריון רציפות מספר 2 (ז"א מקור של קבוצה פתוחה הוא גם פתוח).

צ"ל שלכל קבוצה פתוחה $O \cap B$ (כאשר $O \in \tau_Y$) ב – B מתקיים $f_0^{-1}(O \cap B)$ פתוחה ב- A.

$$\begin{aligned} f_0^{-1}(O \cap B) &= \{x \in A | f(x) \in O \cap B\} = f^{-1}(O \cap B) \cap A \\ &= f^{-1}(O) \cap f^{-1}(B) \cap A \underbrace{=}_{f(A) \subseteq B} \underbrace{f^{-1}(O)}_{\substack{\text{פתוחה ב} - X \\ f \text{ בגלל רציפות}}} \cap A \end{aligned}$$

לכן $f^{-1}(O) \cap A$ קבוצה פתוחה ב – A (תת מרחב).

☺

שאלה כללית: איזו תכונות נשמרות על ידי "תמונה רציפה" ?

(פונקציה <u>רציפה על</u> $f : X \to Y = f(X)$)

בהמשך נוכיח זאת עבור מספר תכונות. למשל :

קומפקטיות, קומפקטיות סדרתית, קשירות, ספרבילִיות

בינתיים מומלץ לנסות לבד !

משפט: צפיפות וספרביליות נשמרות על ידי תמונה רציפה.

הוכחה:

נניח $f: X \to Y$ רציפה <u>על</u>, ז"א $f(X) = Y$.

צ"ל $\bar{A} = X \Leftarrow \overline{f(A)} = Y$.

שקול להוכיח $\overline{f(A)} = f(X)$.

לפי קריטריון (5) של רציפות מתקיים: $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

נציב $\bar{A} = X$ ונקבל $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$.

מצד שני, $\overline{f(A)} \subseteq Y = f(X)$.

לכן קיבלנו: $\overline{f(A)} = f(X) = Y$

והוכחנו שנשמרת צפיפות.

עכשיו אם ניקח $X \in Sep$ אז קיים $A \subseteq X$ כך ש - $\bar{A} = X$, $|A| \leq \aleph_0$.

אז – $\overline{f(A)} = f(X) = Y$.

$|f(A)| \leq \aleph_0$ גם בת מנייה! מכאן גם $Y \in Sep$.

☺

<u>איזומורפיזמים במרחבים טופולוגיים</u>

<u>תזכורת:</u> איזומורפיזם ב - $Metr$ = איזומטריות.

איזומורפיזם ב - TOP = *homeomorphism*.

<u>הגדרה:</u> נניח $(X_1, \tau_1) \xrightarrow{f} (X_2, \tau_2)$ פונקציה בין מ"ט. f נקרא **הומיאומורפיזם**

(Homeomorphism *<u>אזהרה</u>: זה לא* Homomorphism)

אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

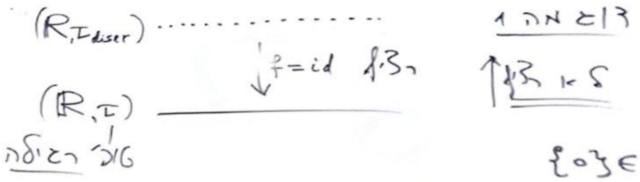
א) f חח"ע + על (ז"א קיימת <u>פונקציה</u> f^{-1}).

ב) f רציפה.

ג) f^{-1} רציפה.

<u>הערה:</u> $\begin{cases} (\text{א}) \\ (\text{ב}) \end{cases} \not\Rightarrow (\text{ג})$

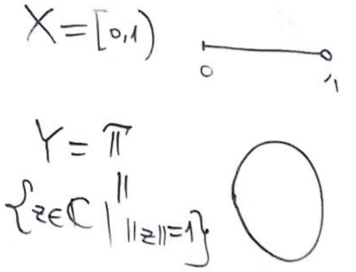
דוגמה 1:



$f=id:\mathbb{R}\to(\mathbb{R},\tau_{discr})$ רציפה אבל לא $f^{-1}:(\mathbb{R},\tau_{discr})\to\mathbb{R}$.

$\{0\}\in\tau_{discr}$ אבל $f^{-1}(0)=\{0\}\notin\tau$.

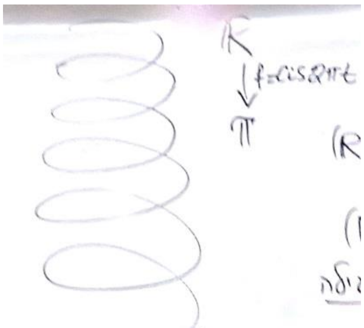
דוגמה 2:

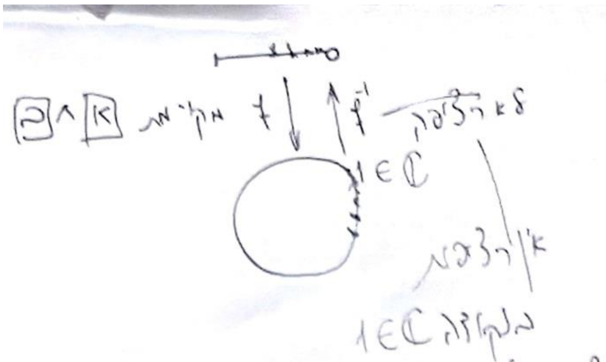


נגדיר $q:\mathbb{R}\to \mathrm{T}:=\{z\in\mathbb{C}:\|z\|=1\},\quad q(t)=cis(2\pi t)=\cos(2\pi t)+i\sin(2\pi t)$

זאת פונקציה רציפה (וגם הומומורפיזם חבורות).

כעת נגדיר צמצום של פונקציה הנ"ל $\mathrm{f}:[0,1)\to\mathrm{T}$.





אז $\mathrm{f}:[0,1)\to\mathrm{T}$ רציפה חח"ע ועל

אבל $\mathrm{f}^{-1}:\mathrm{T}\to[0,1)$ לא רציפה בנקודה $z=0\in T$.

(למצוא תת קבוצה פתוחה (סגורה) ב $[0,1)$ כך שהמקור לא פתוחה (לא סגורה) ב T)

<u>הגדרה</u>: פונקציה $\mathrm{f}:\mathrm{X}\to Y$ נקראת פתוחה אם תמונה של ת"ק פתוחה היא פתוחה.

באופן דומה מגדירים פונקציה סגורה.

<u>שימו לב</u>: נניח $f : X \to Y$ פונקציה רציפה חח"ע ועל. אז הפונקציה הומיאומורפיזם אם"ם היא סגורה (פתוחה).

<u>דוגמאות:</u>

- הפונקציה הנ"ל $f : [0,1) \to T$ היא לא פתוחה ולא סגורה.
- היטל $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1$ רציפה, על, פתוחה, אבל לא סגורה.
- $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 1 & x \in [2,3] \end{cases}$ $f : [0,1] \cup [2,3] \to [0,1]$ רציפה על סגורה לא פתוחה.
- $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 1 & x \in [1,3] \end{cases}$ $f : [0,3] \to [0,1]$ רציפה על סגורה לא פתוחה

הרצאה 6

<u>תזכורת:</u>

<u>הגדרה:</u> נניח $(X_2, \tau_2) \xrightarrow{f} (X_1, \tau_1)$ פונקציה בין מ"ט. f נקרא **הומיאומורפיזם**

(Homeomorphism   *אזהרה: זה לא* Homomorphism)

אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

א) f חח"ע + על (ז"א קיימת פונקציה f^{-1}).

ב) f רציפה.

ג) f^{-1} רציפה.

<u>הגדרה:</u> נסמן - $(X_1, \tau_1) \simeq (X_2, \tau_2)$ אם קיים $X_1 \xrightarrow{f} X_2$ *homeomorphism* ונגיד מרחבים **הומאומורפיים**.

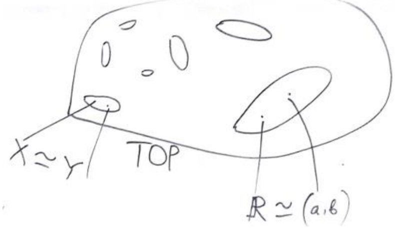
תכונות שמחלקות את TOP למחלקות :

1) $(X, \tau) \simeq (X, \tau)$.

2) $(X_1, \tau_1) \simeq (X_2, \tau_2) \Leftarrow (X_2, \tau_2) \simeq (X_1, \tau_1)$.

3) $\begin{cases} (X_1, \tau_1) \simeq (X_2, \tau_2) \\ (X_2, \tau_2) \simeq (X_3, \tau_3) \end{cases} \Leftarrow (X_1, \tau_1) \simeq (X_3, \tau_3)$.

(בשביל להוכיח את (1) משתמשים ב - id, בשביל (2) ב - f^{-1} ובשביל (3) $f_1 \circ f_2$).



<u>שאלה חשובה</u>: מתי 2 מרחבים טופולוגיים X, Y הם הומיאומורפיים או ומתי לא ?

$X \simeq Y$ או $X \not\simeq Y$

<u>שאלה יותר כללית</u>: מתי קיימת פונקציה רציפה **ועל** $X \xrightarrow{f} Y$

(ז"א מתי $Y =$ "תמונה רציפה" של X).

<u>הערה</u>: מה התכונות שנשמרות ע"י הומאומורפיזמים או ע"י תמונה רציפה ?

א) כל תכונה טופולוגית נשמרת ע"י הומאומורפיזם.

ב) כל תכונה מטרית נשמרת ע"י איזומטריה.

שאלה: למיין קטעים ב - $\mathbb{R}$:

א) עד כדי הומיאומורפיזמים (כן יחס שקילות!).

ב) עד כדי תמונה רציפה (לא יחס שקילות!).

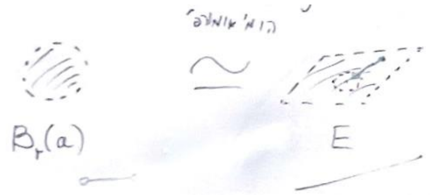
דוגמאות להומיאומורפיזמים:

- הרכבה של פונקציות רציפות (הומיאומו') גם רציפה (הומיאומו').
- אם $f : X \to Y$ רציפה (הומיאומו') אז גם $f : A \to f(A)$ רציפה (הומיאומו').
- כל איזומטריה בעצם הומיאומורפיזם (ההיפך לא תמיד נכון!).
- בכל מרחב נורמי $(E, \|\cdot\|)$: הזזות $T_v : E \to E$, $T_v(x) = v + x$ תמיד איזומטריות.
- כפל בסקלר $c \neq 0$ תמיד הומיאומורפיזם:

$M_c : E \to E \in Lip_{|c|}$, $M_c(x) = c \cdot x$, $0 \neq c \in \mathbb{R}$ קבוע נתון.

$$\boxed{M_c^{-1} = M_{c^{-1}}}$$

<u>משפט</u>: כל מרחב נורמי $\underbrace{\simeq}_{\text{הומיאומורפי}}$ לכל כדור פתוח שלו.



הוכחה:

שלב א' – $\forall r>0, \forall a\in E: B_r(a)\simeq B_1(0)$

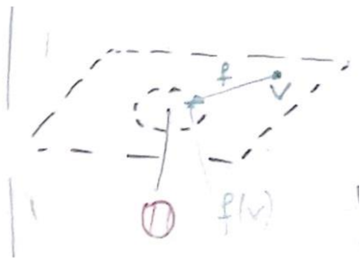
כי: $B_1(0)\underbrace{\simeq}_{M_r} B_r(0)\underbrace{\simeq}_{T_a} B_r(a)$

הערה: הרכבה של הומיאומורפיזם גם עם צמצום מלא (גם בטווח) הוא הומיאומורפיזם.

שלב ב' – מ"ל ש: $E\underbrace{\simeq}_{f} B_1(0)$.

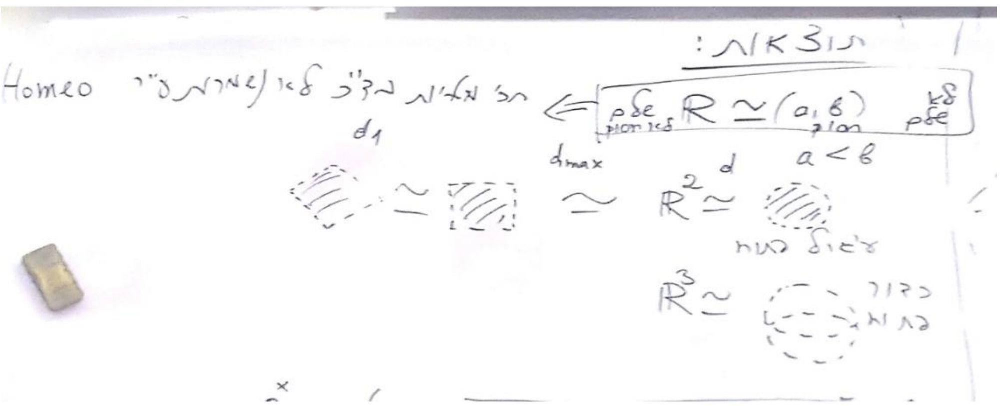
נגדיר $\boxed{f(v)=\frac{1}{1+\|v\|}\cdot v}$ $\quad f: E\to B(0_E,1)$

$f^{-1}(x)=\frac{1}{1-\|x\|}\cdot x \quad f^{-1}: B(0_E,1)\to E$



תוצאות: $\mathbb{R}\simeq(-1,1)\simeq(a,b)$

$\forall v\in\mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n\simeq B(v,r)$



המשך דוגמאות:

- $[a,b]\simeq[c,d]$ כאשר $a<b\,, c<d$
  (למצוא הומיאומורפיזם פונקציה' לינארית למקוטעין).
- $(a,\infty)\simeq(c,d)\simeq(-\infty,b)$

(חלק מההסבר: $(0,\infty)\ \underset{\log_2}{\overset{2^x}{\rightleftarrows}}\ \mathbb{R}$).

- $(0,1)\not\simeq[2,3]$

כי הקטע הסגור קומפקטי בעוד שהקטע הפתוח לא קומפקטי. אפילו לא קיימת פונקציה רציפה ועל מ - $[2,3]$ על- $(0,1)$ כי קומפקטיות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

- $[3,8] \not\simeq [0,1] \cup [3,6]$

כי הראשון קשיר והשני לא קשיר (למרות ששניהם קשירים ולא קומפקטיים).

- $[0,1) \not\simeq (2,5)$

ב - $(2,5)$ כל נקודה היא "נקודה מחלקת" ($(2,5)/\{c\} \notin Conn$). אבל ב - $[0,1)$ יש נק' שלא מחלקת, זאת נק' 0. $[0,1)/\{0\} \in Conn$

<u>הגדרה</u>: נקודה $a \in X$ במ"ט X נקראת **<u>מחלקת</u>** אם: X קשיר אבל $X \setminus \{a\}$ לא קשיר.

הערה: קיום של נקודה לא מחלקת זאת **תכונה טופולוגית** (נשמרת ע"י הומיאומורפיזם). <u>טענה:</u> אם $X \xrightarrow{f} Y$ המיאומו' אז לכל נק' מחלקת $p \in X$ גם $f(p) \in Y$ נק' מחלקת.

$\underbrace{X/\{p\}}_{\substack{\text{פריק} \\ \text{ז"א לא קשיר}}} \xrightarrow{f_*} \underbrace{Y/\{f(p)\}}_{\text{שגם פריק}}$ גם הומיאומורפיזם.

כנ"ל: מספר נקודות מחלקות, מספר נקודות לא מחלקות. כנ"ל מספר *מרכיבי קשירות* .

- הוכיחו ש - $0 \not\simeq 8$ (שניהם קומפקטיים, קשירים...)
- * למיין:

א) את כל "הספרות"

1234567890

ב) האלף-בית האנגלי

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

(עבור sans serif font "ללא קישוטים, ללא עובי" אותיות וגם הספרות)

- כל פונקציה לינארית בין מרחבים אוקלידיים

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

היא רציפה (ליפשיץ – $k = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$), כאשר A_f מטריצה של f

$$\Downarrow$$

- $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ לינארית הפיכה ($\det(A_f) \neq 0$). אזי f הומיאומורפיזם.

תרגיל: הוכיחו שכל ריבוע/עיגול הומיאומורפי עם אליפסה $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שכל הכדורים ב $(\mathbb{Z},d_p)$ הם הומיאומורפיים.

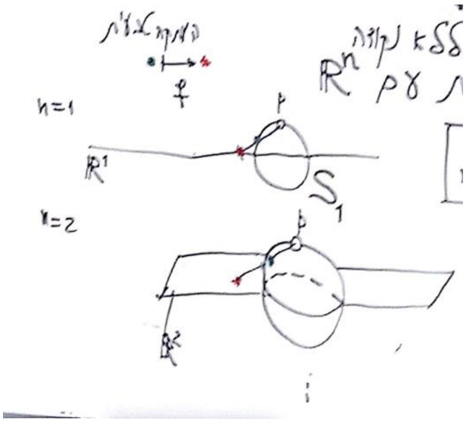
- <u>היטל סטריאוגרפי</u>

טענה: ספירה n – מימדית S_n ללא נקודה אחת היא הומיאומורפית עם $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{S_n/\{z\}\simeq\mathbb{R}^n}$$

ניזכר כי: $S_n=\{(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n}x_i^2=1\}$

למשל: כאשר $n=1,2$ נגדיר f לפי:



<u>הגדרות:</u> (אוטומורפיזמים)

חבורת הומיואומורפיזמים של מ"ט

$X\in TOP$, $Homeo(X):=\left\{X\xrightarrow{f}X \text{ הומיאומורפיזמים}\right\}$ חבורה לגבי ההרכבה

חבורת איזומטריות של מ"מ

$X=(X,d)\in Metr$, $Iso(X):=\left\{(X,d)\to(X,d) \text{ איזומטריות}\right\}$

שימו לב: אם $\tau=top(d)$ אז $\mathrm{Iso}(X,d)$ תת חבורה של $\mathrm{Homeo}(X,\tau)$.

$$Iso(X)\le Homeo(X)\underbrace{\lneq}_{\text{ת"ח}}\underbrace{(S_X,\circ)}_{\text{חבורה סימטרית}}$$

<u>הגדרה:</u> נגדיר פעולה טבעית $Homeo(X)\times X\to X \quad (f,x)\longmapsto f(x)$

מחלקות שקילות $[x]=\{\mathrm{f(x)}\in X \mid \mathrm{f}\in\mathrm{Homeo(X)}\}$ – אורביטה (מסלול) של x.

אומרים ש – X הוא **מ"ט הומוגני** $(homogeneous)$ אם יש רק מסלול 1.

שקול: $\forall\, x,y\in X\ ,\exists f\in Homeo(X): f(x)=y$

<u>דוגמה</u>: כל מ"ט דיסקרטי הוא הומוגני (מה הוא $Homeo(X,\tau_{discr})$?)

<u>דוגמה</u>: $X=(0,2)$ מ"ט הומוגני.

<u>דוגמה</u>: אם $X=[0,1)\cup\{3\}$. אז לא הומוגני. יש 3 מסלולים הבאים:

$$[3]=\{3\},\quad [0]=\{0\},\quad [\tfrac{1}{2}]=(0,1)$$

<u>הגדרה</u>: באופן דומה מגדירים מ"מ (X,d) הומוגני

(אם לפעולה $Iso(X)\times X\to X$ יש מסלול אחד).

<u>דוגמה</u>: $\mathbb{R}^n$, מרחב נורמי, S_n, $(\mathbb{Z},d_p)$ מ"מ הומוגניים (לכן גם הומוגני כמ"ט).

דוגמה: $X=(-1,1)$ אז הוא הומוגני כמרחב טופולוגי אבל לא כמ"מ

(שימו לב: $Iso(X)$ בעל שני איברים בלבד: פונקצית זהות ושיקוף).

<u>תרגיל</u>: כמה מסלולים קיימים בפעולה של $Homeo(x)$ על X אם:

א) $X=(3,\infty)$

ב) $X=[0,1]$

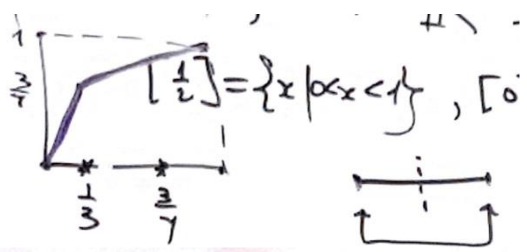
ג) $X=8$

ד) $X=(0,1)\cup(2,4)\cup\{7\}$

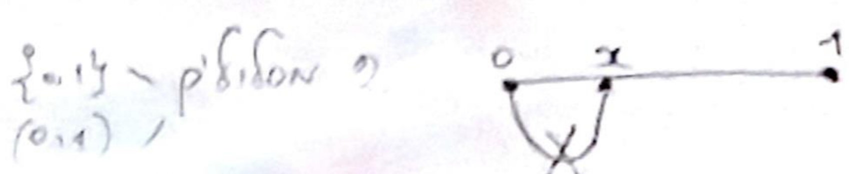
תשובה:

א) מסלול 1 (הומוגניות!). $\mathbb{R}\simeq(3,\infty)$ ו- $\mathbb{R}$ הומוגני (הזזות).

ב) 2 מסלולים. $[0]=\{0,1\}=[1]$ $\left[\frac{1}{2}\right]=\{x|0<x<1\}$



הערות:



לא קיים $h\in Homeo([0,1])$ כך ש $0<x<1$, $h(0)=x$.

כי x נק' מחלקת עבור $[0,1]$ ו- 0 לא.

ג) 2 מסלולים. מדוע ?

ד) 2 מסלולים. מדוע ?

קשירות (המשך)

<u>משפט:</u> קשירות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה:

נניח ש - $X \in Conn$. מאחר ו $f-$ על אז $f(X) = Y$. צ"ל - $Y \in Conn$.

אם נניח שלא, אז Y פריק טופולוגית: $Y = \underbrace{Y_1}_{\neq \emptyset} \sqcup \underbrace{Y_2}_{\neq \emptyset}$ כאשר Y_1, Y_2 פתוחות.

אזי – $X = f^{-1}(Y_1) \sqcup f^{-1}(Y_2)$

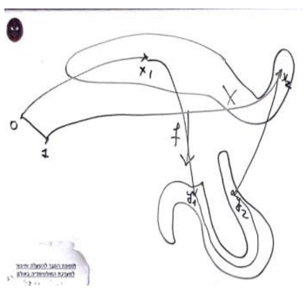
כאשר נשים לב ש - $f^{-1}(Y_1), f^{-1}(Y_2) \neq \emptyset$ כי f היא פונקציה על וגם הן **פתוחות** כי f רציפה.
קיבלנו ש $X-$ פריק, ז"א $X \notin Conn$ בסתירה!

☺

<u>הגדרה</u>: מ"ט X **קשיר מסילתית** אם לכל $x, y \in X$ קיימת מסילה מ x ל y. **מסילה** מ x_1 ל x_2
$[0,1] \xrightarrow{\varphi} X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0) = x_1$, $\varphi(1) = x_2$. סימון: $X \in PConn$.

<u>משפט:</u> קשירות מסילתית נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה: נניח ש - $X \in PConn$. f על ורציפה אז $f(X) = Y$. צ"ל - $Y \in PConn$.



נניח $y_1, y_2 \in Y$, אז קיימים $x_1 \xrightarrow{f} y_1$, $x_2 \xrightarrow{f} y_2$ כי f על.

קיימת מסילה מ x_1 ל x_2 $[0,1] \xrightarrow{\varphi} X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0) = x_1$, $\varphi(1) = x_2$.

נגדיר מסילה – $[0,1] \xrightarrow{f \circ \varphi} Y$ $\quad$ $[0,1] \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} Y$

ואז מצאנו מסילה בין y_1 ל - y_2.

☺

אזהרה: תמונה $f[0,1]$ של המסילה לא תמיד הומיאומורפי ל $[0,1]$.

למשל ידוע שקיימת פונקציה רציפה **ועל** $f:[0,1] \to [0,1]^2$ (Peano curve).

<u>משפט:</u> $PConn \subset Conn$.

הוכחה: נניח $X \in PConn$. צ"ל $X \in Conn$.

אם נניח בשלילה שלא, אז X פריק: $X = X_1 \sqcup X_2$

נבחר $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

$X \in PConn \Leftarrow$ קיימת מסילה מ - x_1 ל - x_2, לכן –

$[0,1] \xrightarrow{\varphi} X \quad \varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2$

כעת – $[0,1] = \varphi^{-1}(X_1) \sqcup \varphi^{-1}(X_2)$

$\varphi^{-1}(X_1)$, $\varphi^{-1}(X_2)$ קבוצות זרות פתוחות (רציפות !)

לא ריקות $(0 \in \varphi^{-1}(X_1), 1 \in \varphi^{-1}(X_2))$

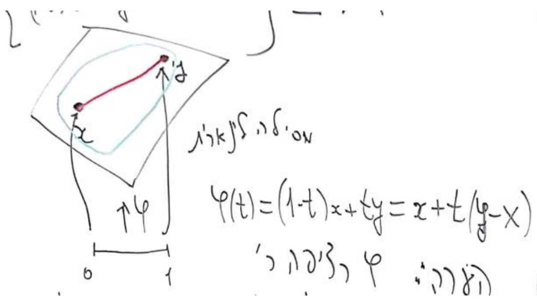
ואז קיבלנו פירוק של $[0,1]$ בסתירה לכך ש - $[0,1] \in Conn$.

☺

הגדרה: תת קבוצה X במ"נ $(E, \|\cdot\|)$ נקראת **קבוצה קמורה** $(convex)$ אם לכל $x, y \in X$ מתקיים –

$\{(1-t)x + ty : 0 \le t \le 1\} \subseteq X$ (מסילה לינארית)

נסמן – $X \in Conv$.



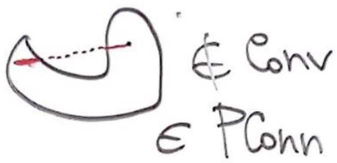
הערה:

φ רציפה כי – $\varphi \in Lip_{\|y-x\|}$.

טענה: $Conv \subset PConn$.

$$\boxed{Conv \subsetneq PConn \subsetneq Conn}$$

דוגמה:



הגדרה: $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ **קטע** אם לכל $a,b \in X$ מתקיים $[a,b] \subseteq X$.

טענה: נניח $X \subset \mathbb{R}$ תת מרחב. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) X "קטע" (יתכן כמובן לא חסום)

2) $X \in Conv$

3) $X \in PConn$

4) $X \in Conn$

הסבר: $(1) \Leftarrow (2)$: לכל $a,b \in X$ מתקיים $[a,b] \subseteq X$. מצד שני $[a,b] = \{a+(b-a)t \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

$(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ נובע מהכלות ברורות $Conv \subseteq PConn \subseteq Conn$.

$(4) \Rightarrow (1)$

אם נניח שלא, אז X לא קטע, כלומר קיימים $a,b \in X$ כך ש $[a,b] \not\subset X$. ז"א קיימים $a < c < b$ כך ש $a,b \in X$ אבל $c \notin X$.

נגדיר $X_1 := (-\infty, c) \cap X, X_2 := (c, \infty) \cap X$

ואז נקבל ש $X = \underbrace{X_1}_{a\in} \sqcup \underbrace{X_2}_{b\in}$ פירוק טופולוגי.

ואז קיבלנו ש - $X \notin Conn$ בסתירה!

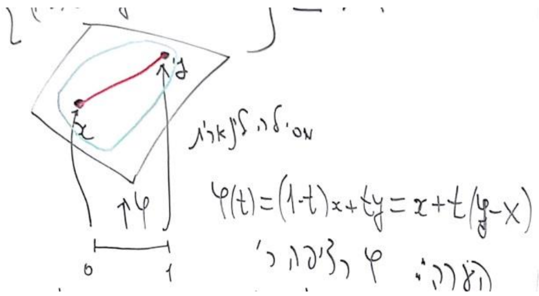
☺

<u>משפט</u> (ערך הביניים): נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Conn$.

2) לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ יש תכונת ערך ביניים.

הרצאה 7



<u>תזכורת</u>: תת קבוצה X במ"נ $(E,\|\cdot\|)$ נקראת **קבוצה קמורה** $(convex)$ אם לכל $x,y\in X$ מתקיים $\{(1-t)x+ty: 0\le t\le 1\}\subseteq X$ (מסילה לינארית).

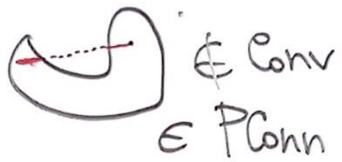
סימון: $X\in Conv$

הערה: φ רציפה כי – $\varphi\in Lip_{\|y-x\|}$.

טענה: $Conv\subset PConn$.

$$\boxed{Conv\subsetneq PConn\subsetneq Conn}$$

דוגמה:



הגדרה: $\varnothing\neq X\subseteq\mathbb{R}$ **קטע** אם לכל $a,\mathrm{b}\in X$ מתקיים $[a,\mathrm{b}]\subseteq X$.

<u>טענה:</u> נניח $X\subset\mathbb{R}$ תת מרחב. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) X "קטע" (יתכן כמובן לא חסום)

2) $X\in Conv$

3) $X\in PConn$

4) $X\in Conn$

הסבר: $(1)\Leftarrow(2)$: לכל $a,\mathrm{b}\in X$ מתקיים $[a,\mathrm{b}]\subseteq X$. מצד שני $[a,\mathrm{b}]=\{a+(b-a)t\,|\,0\le t\le 1\}$.

$(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)$ נובע מהכלות ברורות $Conv\subseteq PConn\subseteq Conn$.

$(4)\Rightarrow(1)$

אם נניח שלא, אז X לא קטע, כלומר קיימים $a,\mathrm{b}\in X$ כך ש $[a,\mathrm{b}]\not\subset X$. ז"א קיימים $a<c<b$ כך ש $a,b\in X$ אבל $c\notin X$.

נגדיר $X_1:=(-\infty,c)\cap X, X_2:=(c,\infty)\cap X$

ואז נקבל ש $X=\underbrace{X_1}_{a\in}\sqcup\underbrace{X_2}_{b\in}$ פירוק טופולוגי.

ואז קיבלנו ש - $X\notin Conn$ בסתירה!

☺

<u>משפט</u> (ערך הביניים): נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Conn$.

2) לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ יש תכונת ערך ביניים.

<u>הוכחה:</u>

$(1) \Leftarrow (2)$:

תמונה רציפה שומרת על $Conn$. לכן $Conn \ni f(X) \subset \mathbb{R}$ ואז מהטענה הקודמת נקבל ש - $f(X) \ni \{$קטעים$\}$, ואז $f(X)$ בעל תכונת ערך הביניים.

$(2) \Leftarrow (1)$:

נניח בשלילה שלא. אז $X \notin Conn$. ז"א קיים פירוק טופולוגי $X = X_1 \sqcup X_2$

נגדיר פונקציה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, אשר שולחת את X_1 ל $- 0$ ואת X_2 שולחת ל $- 1$.

X_1, X_2 פתוחות ב $- X \Leftarrow$ קל לבדוק (4 מקרים) שאכן מקור של קבוצה פתוחה גם קבוצה פתוחה, ואז f רציפה. אבל נקבל ש $- f(X) = \{0,1\}$.

וזאת לא מקיימת את תכונת ערך הביניים, בסתירה!

☺

דוגמאות של קבוצות קמורות:

1) כל מ"נ $(E, ||\cdot||)$.

2) כדורים $B_r(a), B_r[a] \subset E$ בתוך מ"נ.

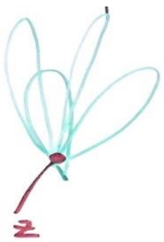
3) מלבנים, תיבות, אליפסוידים, ...

<u>משפט</u> (האלומות – תנאי מספיק לקשירות): נניח X מ"ט, $X = \bigcup_{j\in J} Y_j$ כך ש:

1) $\forall j \in J: Y_j \in Conn$

2) $\bigcap_{j\in J} Y_j \neq \emptyset$

אזי $X \in Conn$.



הוכחה: מתכונה (2) קיימת נקודה משותפת $z \in \bigcap_{j\in J} Y_j$.

נניח בשלילה ש $- X$ פריק, אזי קיימות קבוצות זרות ופתוחות ולא ריקות X_1, X_2 כך ש –

$$X = X_1 \sqcup X_2$$

בה"כ $z \in X_1$ (ואז $z \notin X_2$).

מתקיים – $\forall j \in J: Y_j = (Y_j \cap X_1) \sqcup (Y_j \cap X_2)$

כעת נשים לב ש - $Y_j \cap X_1$ ו - $Y_j \cap X_2$ פתוחות וזרות בתת מרחב Y_j ו $z \in Y_j \cap X_1$.

אז $Y_j \cap X_2 = \emptyset$ לכל j, אחרת היינו מקבלים ש - $Y_j \notin Conn$ (פריק).

כעת – $X_2 = \bigcup_{j\in J}(X_2 \cap Y_j) = \emptyset$ בסתירה לפירוק של X.

☺

<u>תוצאות:</u>

1) נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, כאשר $Y_1, Y_2 \in Conn$, $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. אזי $X \in Conn$

(פשוט המשפט כאשר יש 2 אינדקסים).

2) **שרשור**

נניח $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k$, כאשר $Y_k \in Conn$ לכל $k \in \mathbb{N}$ וכן –

$$\forall k \in \mathbb{N}: Y_k \cap Y_{k+1} \neq \emptyset$$

אזי $X \in Conn$.

הסבר: 1) מיידי מהמשפט!

2) נובע מ - (1) ואינדוקציה נובע מקרה של מס' סופי של הגורמים.

$$\forall k \in \mathbb{N}: A_k \coloneqq Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k \in Conn$$

נשים לב – $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$

וברור – $A_1 \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$

לכן לפי משפט האלומות נקבל ש – $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in Conn$.

☺

<u>הערה</u> (מרכיבי קשירות): במ"ט X נגדיר את היחס הבא –

$x \equiv y \overset{def}{=}$ אם "אפשר לחבר x ל – y ע"י קבוצה קשירה". זאת אומרת, קיימת –

$$Conn \ni A_{x,y} \subset X$$

כך ש – $\{x, y\} \subset A$

טענה: היחס הנ"ל הוא יחס שקילות.

הסבר:

1) $x \equiv x$, $A_{x,x} = \{x\}$.

2) $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$, $A_{y,x} \coloneqq A_{x,y}$.

3) צ"ל – $\begin{cases} x \equiv y \\ y \equiv z \end{cases} \Rightarrow x \equiv z$

$$A_{x,z} \coloneqq A_{x,y} \cup A_{y,z}$$

ואכן $y \in A_{x,y}$ וגם $y \in A_{y,z}$ ואז מתוצאה 1 (שירשור) נקבל ש - $A_{x,z} \in Conn$.

הגדרה: **מרכיב קשירות** של נק x ב X הוא $\{y \in X | x \equiv y\}$ $[x] :=$ "מחלקה של x".

נשים לב כי – $X = \bigcup_{x \in X}[x]$.

תכונות:

- $X = \bigcup_{x \in X}[x]$ (יש חזרות! $x \equiv y \Leftrightarrow [x] = [y]$).
- מס' (עוצמה) של מרכיבי קשירות נשמר ע"י הומיאומורפיזמים.

תרגיל: הוכיחו ש T לא הומיאומורפי ל L (sans serif font).

הסבר: במרחב T יש נקודה z כך שלתת מרחב $T \setminus \{z\}$ יש 3 מרכיבי קשירות.

אבל לכל $a \in L$ לתת מרחב $L \setminus \{a\}$ יש לכל היותר 2 מרכיבי קשירות.

- X קשיר $\Leftrightarrow$ יש מרכיב קשירות 1 בלבד.

  רמז: משפט האלומות.

- $[x] \in Conn$
- $[x] = \bigcup\{A \subseteq X | x \in A, A \in Conn\}$

ז"א $[x] =$ תת קבוצה קשירה הגדולה ביותר המכילה את x.

- $[x]$ סגור ב X –.

רמז: תוכיחו קודם את התרגיל הבא (ואז תשתמשו בתכונה הקודמת):

תרגיל: נניח $\bar{Y} = X$ (ז"א Y צפופה ב – X). אם $Y \in Conn$ אז גם $X \in Conn$.

דוגמה: תארו מרכיבי קשירות של:

א. $X = (0,2) \cup (2,5) \cup \{7\}$

תשובה: $[1] = (0,2), [3] = (2,5), [7] = \{7\}$

ב. $X = \{1,2,3,4\} \times \mathbb{R}$

תשובה: $\{1\} \times \mathbb{R}, \{2\} \times \mathbb{R}, \{3\} \times \mathbb{R}, \{4\} \times \mathbb{R}$.

הגדרה: מ"ט X נקרא **"לא קשיר לחלוטין"** $(totally\ disconnected)$ אם

$[x] = \{x\}$ לכל $x \in X$ (**רק** נקודון תת קבוצה קשירה).

דוגמאות:

1) מרחבים דיסקרטיים.

$\mathbb{Q}$ (2

$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (3

$(\mathbb{Z}, d_p)$ * (4

(רמז: לכל $a \in (\mathbb{Z}, d_p)$ ו $b \neq a$ קיימת סביבה סגוחה $U \in N(a)$ כך ש $b \notin U$)

$(\mathbb{R}, \tau_s)$ (Sorgenfrey Line) * (5 כאשר בקבוצה $\mathbb{R}$ מוגדרת טופולוגיה הבאה

$$\tau_s := \{O \subseteq \mathbb{R} : x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 [x, x+\varepsilon) \subseteq O\}$$

<u>הגדרה:</u> (מרכיב קשירות מסילתי): לכל מ"ט X ונקודה $x \in X$ מרכיב קשירות $[\mathrm{x}]_p$

של x מוגדר כמחלקת שקילות של x לגבי יחס שקילות הבא:

$$x \equiv_P y \overset{def}{=} \text{קיימת ב} X \text{מסילה מ} - x \text{ ל} - y$$

טענה: $\equiv_P$ יחס שקילות.

הסבר:

1) צ"ל – $x \equiv_P x$. ניקח מסילה קבועה.

2) צ"ל – $x \equiv_P y \Leftarrow y \equiv_P x$. עבור מסילה – $f: [0,1] \to X$

נגדיר "מסילה הפוכה" – $f^*(t) = f(1-t)$ $\quad f^*: [0,1] \to X$

3) צ"ל – $\begin{cases} x \equiv_P y \\ y \equiv_P z \end{cases} \Rightarrow x \equiv_P z$

עבור – $\begin{cases} f_1(0) = x, f_1(1) = y \\ f_2(0) = y, f_2(1) = z \end{cases}$

נגדיר $f_3: [0,1] \to X$ כך ש – $f_3(t) = \begin{cases} f_1(2t), \ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1), \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$

$$f_3(0) = x, f_3(1) = z$$

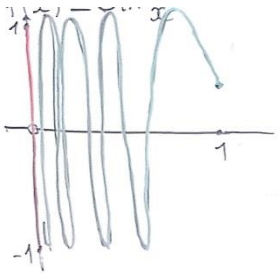
ונקבל ש - f_3 רציפה מהתרגיל הבא:

תרגיל: נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, Y_1, Y_2 סגורות.

נתונה פונקציה $X \xrightarrow{f} Z$ כך ש הצמצומים $f\big|_{Y_1}: Y_1 \to Z$,$f\big|_{Y_2}: Y_2 \to Z$ רציפות.

אז f רציפה (* תנו דוגמה נגדית אם אין סגירות!).

<u>הערה</u>: $PConn \neq Conn$



נגדיר פונקציה $(0,1] \xrightarrow{f} [-1,1]$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

נגדיר – $X := (\{0\} \times [-1,1]) \cup Gr(f)$

$$(0,1] \simeq Gr(f) := \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 < x \leq 1\right\}$$

כעת, $Gr(f) \simeq (0,1]$ קשיר ו - $Gr(f)$ צפוף ב – X (כלומר $\overline{Gr(f)} = X$), לכן (לפי התרגיל הנ"ל) $X \in Conn$. ז"א יש מרכיב קשירות 1.

אבל אין מסילה מנקודה "אדומה" (על הקטע) לנקודה "ירוקה" (ראו ספר האוניברסיטה הפתוחה, טופולוגיה קבוצתית).

יש 2 מרכיבי קשירות מסילתיים ולכן X לא קשיר מסילתית, כלומר $X \notin PConn$.

<u>תרגיל</u>: (לעתיד) לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} Y$ מתקיים ש

$$X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x, f(x)) | x \in X\}}_{\text{תת מרחב טופולוגי}} \subset X \times Y.$$

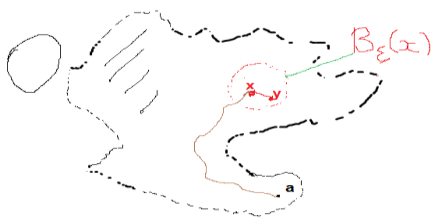
בהמשך נלמד מכפלה טופולוגית (באופן כללי).

<u>תרגיל</u>: כל קבוצה <u>קשירה ופתוחה</u> O במרחב <u>נורמי</u> E היא קשירה מסילתית.

<u>הסבר</u>: נבחר $a \in O$ ונסמן $a \in A := [a]_p$ מרכיב קשירות מסילתית של a <u>במרחב</u> O.

אז A פתוחה. כי אם $x \in A$ אז $B_\varepsilon(x) \subseteq O$ עבור ε מספיק קטן. $B_\varepsilon(x)$ קמור לכן קיימת מסילה לינארית ב $B_\varepsilon(x)$ מ x לכל $y \in B_\varepsilon(x)$. אז גם קיימת מסילה (לא בהכרח לינארית) במרחב O מנקודה a ל y (טרנזיטיביות). לכן $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

באופן דומה אפשר להוכיח שגם המשלים $O \setminus A$ פתוח. אבל אז $O \setminus A$ קבוצה ריקה כי אחרת נקבל ש O פריק. לכן $O = A = [a]_p$ ואז O קשיר מסילתית (מרכיב 1).



הגדרה: X נקרא **קשיר מקומית** בנקודה $a\in X$ אם לכל סביבה $U\in N(a)$ קיימת סביבה $N(a)\ni V\subseteq U$ כך ש V קשיר. אומרים: *קשיר מקומית* אם זה מתקיים בכל נקודה.

תרגיל:

א. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה).

ב. ** תנו דוגמה של תת מרחב ב $\mathbb{R}^2$ שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

קישורים מומלצים:

https://en.wikipedia.org/wiki/Homeomorphism

https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection

https://en.wikipedia.org/wiki/Connected_space

בסיס לטופולוגיה

נגדיר סימונים חדשים. נניח $\gamma\subseteq P(X)$ (אוסף תת קבוצות ב X). נגדיר:

- $\gamma^{\cup}:=\{\cup\{B:B\in\beta\}\mid\beta\subseteq\gamma\}$ (כל מיני איחודים דרך איברים של γ)
- $\gamma^{\cap F}:=\{\cap\{B:B\in\beta\}\mid\beta\subseteq\gamma,\beta\text{ is finite}\}$ (חיתוכים סופיים דרך איברים של γ)

תמיד: $\gamma\subseteq\gamma^{\cap F}$ $\quad\gamma\subseteq\gamma^{\cup}$ $\quad\varnothing\in\gamma^{\cup}$ $\quad\varnothing\in\gamma^{\cap F}$ (ניקח β קבוצה ריקה)

למשל אקסיומות טופולוגיה אפשר לכתוב כך:

$(t_1)\ \ \varnothing,X\in\tau \qquad (t_2)\ \ \tau^{\cap F}=\tau \qquad (t_3)\ \ \tau^{\cup}=\tau$.

הגדרה: (בסיס $basis$) יהי (X,τ) מ"ט. $\gamma\subseteq\tau$ נקרא **בסיס** (לטופולוגיה τ) אם כל קבוצה פתוחה (לא ריקה) שווה לאיחוד איברים מ $-\gamma$.

הערה: (הגדרה שקולה) התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה τ.
2. $\gamma^{\cup}=\tau$.
3. $\gamma\subseteq\tau$ ולכל $O\in\tau$ ולכל $a\in O$ קיים $G_a\in\gamma$ כך ש $a\in G_a\subseteq O$.

הגדרה: אומרים ש - (X,τ) **בעל תכונת מנייה שנייה** ($second\ countable$) ונסמן:

$$(X,\tau) \in B_2$$

אם קיים **בסיס** γ **בן מנייה**.

<u>דוגמאות</u>: (תשתמשו בהגדרה (3))

- ב $X = \mathbb{R}$ $\gamma_1 = \{(a,b) \mid a < b\}$ וגם $\gamma_2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ בסיסים.
- ב $X = \mathbb{R}^2$

א. γ_0={עיגולים פתוחים}

ב. $\gamma_1 = \{(a,b)\times(\mathrm{c},\mathrm{d})\}$={מלבנים פתוחים}

ג. γ_2={ריבועים פתוחים} γ_3={משולשים פתוחים}

ד. γ_4={עיגולים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות"}

- $\mathbb{R}^n \in B_2$

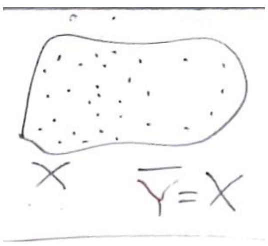
γ_4={כדורים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות" ורדיוסים $\frac{1}{k}$} בן מניה !

- לכל (X,d) "כדורים פתוחים" בסיס לטופולוגיית $top(d)$.

א. $\gamma := \{B_r(a)\}_{\substack{a\in X\\ r>0}}$ $\gamma^{\cup} = top(d)$ (ראו משפט: "כדורים בסיס").

ב. גם $\gamma_1 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{\substack{a\in X\\ n\in\mathbb{N}}}$ מהווה בסיס.

<u>טענה</u>: לכל (X,d) ולכל $\bar{Y} = X$ (כלומר Y צפוף בX) $\gamma_2 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{\substack{a\in Y\\ n\in\mathbb{N}}}$ מהווה בסיס ל $top(d)$.



<u>תוצאה חשובה:</u> אם מרחב מטרי (X,d) הוא ספרבילי אז הוא גם B_2.

$$(X,d) \in B_2 \Leftarrow (X,d) \in Sep$$

<u>טענה</u>: הוכיחו ש B_2 תכונה <u>תורשתית</u>.

רמז: תבדקו שאם γ בסיס ל (X,τ) ו $Z \subseteq X$ תת קבוצה אז $\gamma_Z := \{G \cap Z \mid G \in \gamma\}$ בסיס לתת מרחב (Z,τ_Z).

<u>טענה</u>: לכל מרחב דיסקרטי (X,τ_{discr}) אוסף כל הנקודונים $\gamma_0 = \{\{x\} \mid x \in X\}$ הוא בסיס ל (X,τ_{discr}). לכל בסיס אחר γ מתקיים $\gamma_0 \subseteq \gamma$.

הסיקו: $(X,\tau_{discr}) \in B_2 \Leftrightarrow |X| \le \aleph_0$.

למשל: $(\mathbb{R},\tau_{discr}) \notin B_2$

הרצאה 8

<u>משפט</u>: $B_2 \subset Sep$.

<u>הוכחה</u>: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X,τ). צריך למצוא תת קבוצה צפופה בת מניה.

בה"כ $\varnothing \notin \gamma$. לכל $G \in \gamma$ נבחר נקודה אחת בלבד $y_G \in G$. נגדיר $Y_\gamma := \{y_G \mid G \in \gamma\}$ אז Y_γ בת מניה (כי γ ב"מ) ו Y_γ צפופה ב X. אכן נוכיח $cl(Y_\gamma) = X$.

לכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש $a \in G_a \subseteq O$. לפי הבנייה קיים $y_G \in G_a$

לכן $y_G \in Y_\gamma \cap O \neq \varnothing$.

זה מוכיח שכל נקודה $a \in X$ שייכת לסגור של Y_γ. ז"א $cl(Y_\gamma) = X$.

☺

<u>תוצאה 1</u>: $\boxed{B_2 \cap Metriz = Sep \cap Metriz}$..

<u>תוצאה 2</u>: במרחבים מטריזביליים – ספרביליות כן תורשתית.

הסבר: כי B_2 תורשתית ...

<u>טענה</u>: $l_\infty \notin Sep$ (קיים מרחב בנך לא ספרבילי).

הסבר: $(l_\infty, d_{sup}) \underset{\text{תת מרחב מטרי}}{\hookleftarrow} \underbrace{(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d_\Delta)}_{\text{סדרות בינאריות}}$ לא ספרבילי

(מרחב דיסקרטי ספרבילי אם"ם הוא בן מניה)

הערה 1: $B_2 \neq Sep$.

נוכיח בהמשך שקו סורגנפראי מקיים: $(\mathbb{R},\tau_s) \in Sep \quad (\mathbb{R},\tau_s) \notin B_2,$.

הערה 2: ספרביליות לא תורשתית (גם בבמרחבים יחסית טובים).

למשל: * "מישור סורגנפראי" $(\mathbb{R},\tau_s)^2 \in Sep$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי.

טענה: נניח X קבוצה ו γ אוסף תת קבוצות ב X. התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה מסוימת.

2. א. $X \in \gamma^{\cup}$

ב. חיתוך של 2 קבוצות מ γ אפשר להציג כאיחוד של קבוצות מ γ.

הערה: ב שקול ל ב*: $\forall A,B \in \gamma\ \forall x \in A \cap B\ \exists C \in \gamma \quad x \in C \subseteq A \cap B$

ב* שקול ל ב**: $\gamma^{\cap_F} \subseteq \gamma^{\cup}$.

הוכחה: נגדיר אוסף $\tau := \gamma^{\cup}$. מ"ל τ טופולוגיה.

$(t_1) \quad \varnothing, X \in \tau$

הסבר: $X \in \tau$. בגלל תנאי א. תנאי $\varnothing \in \tau$ נובע מהתכונה הנ"ל על $\gamma^{\cup}$.

$(t_2) \quad \tau^{\cap_F} = \tau$

הסבר: $\tau^{\cap_F} = (\gamma^{\cup})^{\cap_F} = (\gamma^{\cap_F})^{\cup} \subseteq (\gamma^{\cup})^{\cup} = \gamma^{\cup} = \tau$.

$(t_3) \quad \tau^{\cup} = \tau$

הסבר: $\tau^{\cup} = (\gamma^{\cup})^{\cup} = \gamma^{\cup} = \tau$.

☺

בסיס מקומי

הגדרה: $\beta \subseteq N(a)$ נקרא **בסיס מקומי** בנקודה a, אם לכל $U \in N(a)$ קיים $V \in \beta$ כך ש $V \subseteq U$.

הגדרה: אומרים ש- (X,τ) **בעל תכונת מנייה ראשונה**, ונסמן: $(X,\tau) \in B_1$

אם לכל נקודה $a \in X$ קיים בסיס מקומי בן מנייה.

<u>דוגמה:</u> לכל (X,d) – דוגמאות לבסיס מקומי בנקודה – a

$\beta_1 := \{B_r(a)\}_{r>0}$

$\beta_2 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ בן מנייה ! $\beta_3 := \{B[a,\frac{1}{n}] : n\in\mathbb{N}\}$

<u>תוצאה:</u> $Metriz \subset B_1$

<u>דוגמה:</u> $(X,\tau_{discr}) \in \mathrm{B}_1$.

הסבר: לכל $a\in(X,\tau)$ היא נקודה מבודדת אם"ם נקודון $\alpha := \{a\}$ הוא בסיס מקומי.

<u>הערה:</u>

- מספיק לבדוק רציפות פונקציה דרך בסיס.
- מספיק לבדוק רציפות בנקודה עבור סביבות מבסיס מקומי.
- מספיק לבדוק התכנסות סדרות עבור סביבות מבסיס מקומי

<u>תרגיל:</u> B_1 תכומה תורשתית.

<u>טענה:</u> $B_2 \subset B_1$

הסבר: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X,τ). לכל $a\in X$ נגדיר $\gamma_a := \{A\in\gamma \mid a\in A\}$.

אז γ_a בסיס מקומי בנקודה a.

<u>דוגמה:</u> $B_2 \neq B_1$. $\begin{cases}(\mathbb{R},\tau_{discr}) \in B_1\\(\mathbb{R},\tau_{discr}) \notin B_2\end{cases}$

<u>הערה:</u> $Discrete \subset Metriz \subset B_1$

$Metriz \cap Sep \subset B_2 \subset B_1$

<u>הגדרה:</u> $\mathbf{dim}(X) = \mathbf{0} \overset{def}{=}$ קיים בסיס γ לטופולוגיה כך שכל $A \in \gamma$ קבוצה סגוחה .

<u>הגדרה:</u> אומרים ש $\dim X \leq 1$ אם קיים בסיס γ כך ש $\dim\partial(A) = 0 \quad \forall A\in\gamma$.

אומרים ש $\dim X \leq n+1$ אם קיים בסיס γ כך ש $\dim\partial(A) \leq n \quad \forall A\in\gamma$.

דוגמאות: $\dim\mathbb{R}^n = \dim S_n = n$ ....

א. $\dim(X, \tau_{discr}) = 0$

ב. $\dim(\mathbb{Q}) = 0$.

$\gamma \coloneqq \{(a,b) \cap \mathbb{Q} | a,b \in \mathbb{Q}^c\}$ בסיס שמורכב מקבוצות סגוחות.

$(a,b) \cap \mathbb{Q}$ קבוצה סגוחה ב - $\mathbb{Q}$ לכל $a,b \in \mathbb{Q}^c$.

ג. $\dim(\mathbb{Z}, d_p) = 0$.

ד. $\dim(\mathbb{R}, \tau_S) = 0$ Sorgenfrey line

תזכורת: $O \in \tau_S \overset{def}{=} x \in O \Rightarrow \exists\, \epsilon = \epsilon_x > 0 : [x, x+\epsilon_x) \subset O$

תכונות קו סורגנפריי:

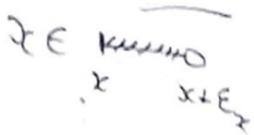
- $(\mathbb{R}, \tau_s) \in T_2$
- א. $\tau \neq \tau_s$ ב. $\tau \subset \tau_s$.

  הסבר: א. $[0,1) \notin \tau_s$, $[0,1) \in \tau_s$.

  ב. מ"ל שבסיס של טופולוגיה טבעית τ מוכל ב τ_s.

  $(a,b) = \cup\{[x, x+\varepsilon_x) \mid x \in (a,b)\} \in \tau_s$
- $\dim(\mathbb{R}, \tau_S) = 0$.

  <u>הסבר:</u> $\gamma \coloneqq \{[a,b) : a < b\} \subset \tau_S$ בסיס שמורכב מקבוצות סגוחות.

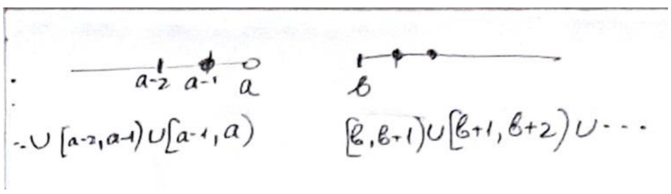


$O = \cup_{x \in O} [x, x+\epsilon_x)$

- טענת עזר: כל $[a,b)$ **סגוחה** –

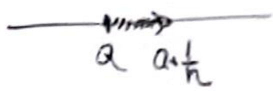
א) $[a,b) \in \tau_S$ ברור (כלומר פתוחה לפי ההגדרה).

ב) $[a,b)$ גם סגורה כי $\mathbb{R}/[a,b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ פתוחה.



- $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep$

  הסבר: רציונליים $\mathbb{Q}$ קבוצה צפופה גם בטופולוגית τ_s כי $[a,b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$
- $(\mathbb{R}, \tau_s) \in B_1$



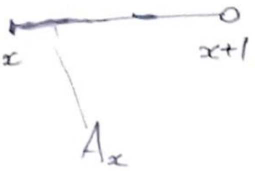
<u>הסבר:</u>

$$\alpha \coloneqq \left\{ U_n \coloneqq \left[a, a+\frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \subset N_{\tau_S}(a)$$

בסיס מקומי בן מנייה בנקודה $a \in \mathbb{R}$.

- **טענה**: $(\mathbb{R},\tau_s) \notin B_2$

הוכחה: נניח בשלילה שקיים בסיס $\gamma \subset \tau_s$ כך ש γ בן מנייה.



$[x,x+1) \in \tau_s$ פתוחה, לכן הוא שווה לאיחוד איברים מבסיס γ.

אז קיים $A_x \in \gamma$ כך ש - $x \in A_x \subset [x,x+1)$.

נבחר A_x כזה ונגדיר העתקה $\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \gamma \quad x \mapsto A_x$

φ חח"ע $(x \neq y \Rightarrow A_x \neq A_y)$.

$$2^{\aleph_0} = \aleph = |\mathbb{R}| = |\varphi(\mathbb{R})| \le |\gamma|$$

מכאן $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} \le |\gamma|$, לכן γ לא בת מנייה!

- $(\mathbb{R},\tau_s) \in T_{3\frac{1}{2}}$.

הסבר: נובע מהטענה הבאה:

משפט: אם $X \in T_2$ וגם $\dim(X) = 0$ אז - $X \in T_{3\frac{1}{2}}$.

הוכחה: נניח $a \in X, a \notin B, cl(B) = B$.

על מנת לבדוק $X \in T_{3.5}$ צ"ל קיימת הפרדה פונקציונלית של a ו B.

$a \in B^c \in \tau$. לכן לפי הגדרת מימד אפס קיימת קבוצה סגוחה O כך ש $a \in O \subseteq B^c$

$O \subset X$ קב' סגוחה אזי – $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in O \\ 1, & x \notin O \end{cases}$

רציפה! (4 מקרים .... ראינו הוכחה דומה).

ברור שהפונקציה מפרידה a ו B.

☺

- $(\mathbb{R},\tau_s) \notin Metriz$.

הסבר: $Metr \cap Sep \subset B_2$. אבל $(\mathbb{R},\tau_s) \in Sep$ $(\mathbb{R},\tau_s) \notin B_2$.

תרגיל: הוכיחו שאם $X \in T_2, \dim X = 0$ אז X לא קשיר לחלוטין.

<u>קשר בין עקרון *Heine* ותכונת B_1</u>

הגדרה: אומרים שמ"ט הוא בעל **תכונת *FU*** $(Frechet - Urysohn)$ אם:

$$\forall A \subseteq X: \ \ scl(A) = cl(A)$$

<u>הערה:</u> $Metriz \subset B_1 \subset FU$

<u>הערה:</u> למדנו דוגמה של מ"ט שהוא לא FU.

<u>טענה:</u> $B_1 \subseteq FU$.

הוכחה מקוצרת: שימו לב שאם $X \in B_1$ אז לכל נקודה יש בסיס מקומי בן מנייה

$\alpha = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ <u>מונוטוני</u> (ז"א $U_{n+1} \subseteq U_n$). ואז ההמשך דומה למקרה של מ"מ

<u>משפט</u> (עיקרון *Heine* מתוקן): נניח $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ פו' בין מ"ט. נניח ש - $(X,\tau) \in FU$ (למשל: $(X,\tau) \in B_1$)) אין הגבלה על Y. אז התנאים הבאים שקולים:

א) f רציפה.

ב) f שומרת על התכנסות.

<u>הוכחה:</u> $(1) \Rightarrow (2)$: תמיד (ממשפט $\frac{1}{2}$ היינה).

$(2) \Rightarrow (1)$: (מקוצרת) .....

$$f\big(cl(A)\big) \underbrace{=}_{X \in FU} f\big(scl(A)\big) \underbrace{\subseteq}_{\text{הראנו}} scl\big(f(A)\big) \underbrace{\subseteq}_{\text{תמיד מתקיים}} cl\big(f(A)\big)$$

☺

<u>תוצאה:</u> עיקרון *Heine* תמיד נכון למשל עבור קו $Sorgenfrey$ $(\mathbb{R},\tau_s) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)-$

כי $(\mathbb{R},\tau_s) \in B_1 \subset FU$.

<u>הערה:</u> בטופולוגיה, באנליזה ... יש צורך אמיתי ב"סדרות מוכללות":

$(M,\preccurlyeq)$ קבוצה <u>סדורה חלקית</u> **מכוונת** (לכל $\forall a,b \in M \ \exists c \in M \ a \le c, b \le c$).

סדרה מוכללת או רשת (*generalized sequences or net*) היא פונקציה $(M,\preccurlyeq) \xrightarrow{f} X$

(סדרה רגילה: $(\mathbb{N},\le) \xrightarrow{f} X$).

<u>דוגמה חשובה</u>: כל בסיס מקומי β (לנקודה a) דוגמה לקבוצה סדורה מכוונת.

אם לכל $V \in \beta$ נבחר באיבר $x_V \in V$ אז נקבל $\lim\{x_V : V \in \beta\} = a$.

דרך רשתות אפשר לתת תיאור של $cl(A)$.

$z \in cl(A) \Leftrightarrow z$ גבול של סדרה מוכללת

ואז יש הכללת עיקרון *Heine* ...

שימו לב: למשל אינטגרלים זה סוג של גבול דרך רשתות מסוימות.

ספר מומלץ: ד. ליבוביץ, טופולוגיה קבוצתית, האוניברסיטה הפתוחה.

Pre-base (subbase)

הגדרה: נניח (X,τ) מ"ט. $\alpha \subseteq \tau$ נקרא פרא-בסיס (אומרים גם תת-בסיס) אם

$\alpha^{\cap F}$ הוא בסיס ל τ שקול: $(\alpha^{\cap_F})^{\cup} = \tau$

דוגמאות:

1) כל בסיס הוא פרא-בסיס.

2) א) $X = \mathbb{R}$ $\alpha \coloneqq \{(-\infty, b), (a, \infty)\}$. $a, b \in \mathbb{R}$ (או $a, b \in \mathbb{Q}$).

α פרא– בסיס אבל לא בסיס! $\underbrace{\gamma = \{(a,b)\}}_{\text{בסיס ל-}\mathbb{R}} \subset \alpha^{\cap_2} \subset \alpha^{\cap_F}$

הגדרה: לכל קבוצה סדורה ליניארית $(X,\leq)$ אפשר להגדיר "interval topology" $\tau_{\leq}$

עם פרא-בסיס $\alpha \coloneqq \{(-\infty,b), (a,\infty) \mid a,b \in X\}$ $\tau_{\leq} = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

ב) $X = \mathbb{R}^2$. $\alpha = \{(a,b) \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times (c,d)\}$

כאשר $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ (או $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$) הוא פרא-בסיס.

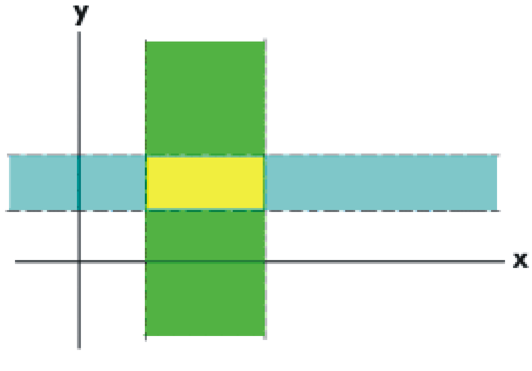


Fig. 2

טענה: נניח $X, Y \in TOP$ ונתונה פונקציה $f: X \to Y$.

$\alpha \subset \tau_Y$ פרא-בסיס. אז התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה.
2. $\forall U \in \alpha: f^{-1}(U) \in \tau_X$.

הסבר:

$(2) \Leftarrow (1)$: בגלל קריטריון 2 של הרציפות.

$(1) \Leftarrow (2)$: צ"ל $\forall O \in \tau_Y : f^{-1}(O) \in \tau_X$.

מצד שני, α תת בסיס ל - τ_Y, לכן – $O \in \tau_Y = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

$f^{-1}(O) \in \tau_X$ כי ה"מקור" שומר על $\cap_F$ וגם על $\cup$.

■

תוצאה: התנאים הבאים שקולים :

1. $f: X \to \mathbb{R}$ רציפה.
2. $f^{-1}(-\infty, b), f^{-1}(a, \infty)$ פתוחות לכל $a, b \in \mathbb{Q}$ (או $a, b \in \mathbb{R}$).

הסבר: דוגמה 2א + הטענה.

■

טענה: נניח $\alpha \subset P(X)$ כך ש – α כיסוי ל – X. אז α הוא פרא-בסיס לטופולוגיה – $\tau := (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

הסבר:

(t_1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \alpha^{\cup}$ (כי נתון ש – α כיסוי).

$$(t_2) \quad \tau^{\cap_F} = ((\alpha^{\cap_F})^{\cup})^{\cap_F} = ((\alpha^{\cup})^{\cap_F})^{\cap_F} = (\alpha^{\cup})^{\cap_F} = \tau$$

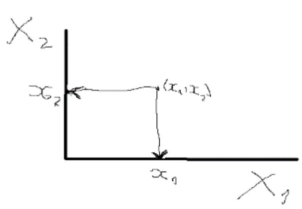
$$(t_3) \quad \tau^{\cup} = ((\alpha^{\cap_F})^{\cup})^{\cup} = (\alpha^{\cap_F})^{\cup} = \tau .$$

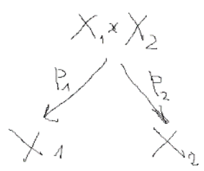
■

מכפלה טופולוגית (מס' סופי של הגורמים)

(X_1, τ_1), (X_2, τ_2) מ"ט. איך מגדירים "טופולוגיה טבעית" על

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} = \prod_{i \in \{1,2\}} X_i \qquad (X_1 \times X_2, \tau_\Pi = ?)$$





כללי יותר: $\tau_\Pi = ?$ על $X = X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i\} = \prod_{i \in \{1, \cdots, n\}} X_i$

רעיון: מגדירים טופולוגית מכפלה כטופולוגיה הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של **הטלות**

$$p_k:\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}}X_i\to X_k \quad p_k(x_1,\cdots,x_n)=x_k$$

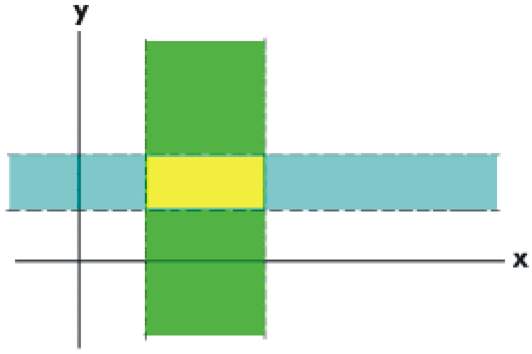


Fig. 2

$$\{(x_1,x_2)\in X_1\times X_2|x_1\in O_1\}=p_1^{-1}(O_1)=O_1\times X_2$$

$$p_2^{-1}(O_2)=X_1\times O_2$$

$$(O_1\times X_2)\cap(X_1\times O_2)=\underbrace{O_1\times O_2}_{\text{"מלבן פתוח"}}$$

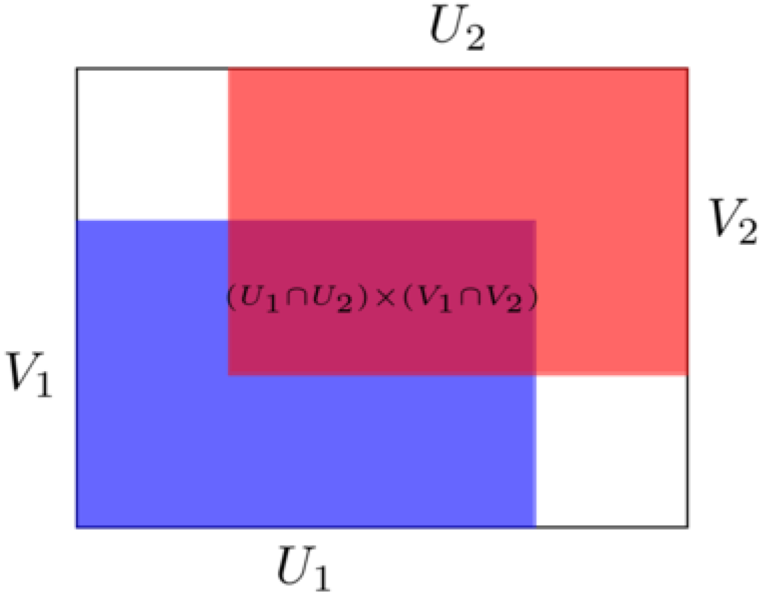
$O_1\times X_2$, $X_1\times O_2$ חייבים להיות מתוך טופולוגיה τ_π על $X_1\times X_2$ על מנת להבטיח את הרציפות.

אז גם חיתוך (סופי) – $\quad O_1\times O_2\in\tau_\pi$

הגדרה: $\gamma:=\{O_1\times\cdots\times O_n\,|\,O_i\in\tau_i\}$ "תיבות בסיסיות"

("מלבנים פתוחים" $\gamma:=\{O_1\times O_2\,|\,O_1\in\tau_1,O_2\in\tau_2\}$ במקרה של $n=2$)

מקיים את התנאים: $\gamma^{\cap F}=\gamma, X\in\gamma$



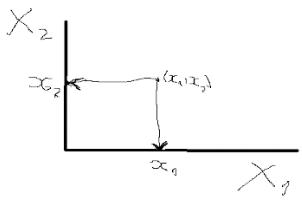
$$(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)=(U_1\cap U_2)\times(V_1\cap V_2)$$

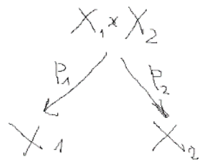
הרצאה 9

<u>מכפלה טופולוגית (מס' סופי של הגורמים)</u>

(X_1,τ_1), (X_2,τ_2) מ"ט. איך מגדירים "טופולוגיה טבעית" על

$$X=X_1\times X_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in X_1,x_2\in X_2\}=\prod_{i\in\{1,2\}}X_i \qquad (X_1\times X_2,\tau_{\Pi}=?)$$





יותר כללי: $\tau_{\Pi}=?$ על $X=X_1\times\cdots\times X_n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in X_i\}=\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}}X_i$

<u>רעיון:</u> מגדירים <u>טופולוגית מכפלה</u> כטופולוגיה הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של <u>**הטלות**</u>

$$p_k:\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}}X_i\to X_k \qquad p_k(x_1,\cdots,x_n)=x_k$$

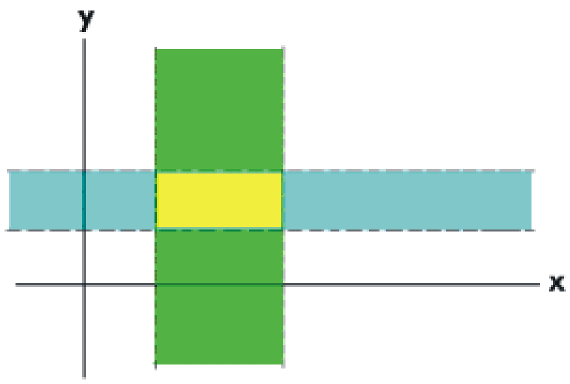


Fig. 2

$$\{(x_1,x_2)\in X_1\times X_2|x_1\in O_1\}=p_1^{-1}(O_1)=O_1\times X_2$$

$$p_2^{-1}(O_2)=X_1\times O_2$$

$$(O_1\times X_2)\cap(X_1\times O_2)=\underbrace{O_1\times O_2}_{\text{"מלבן פתוח"}}$$

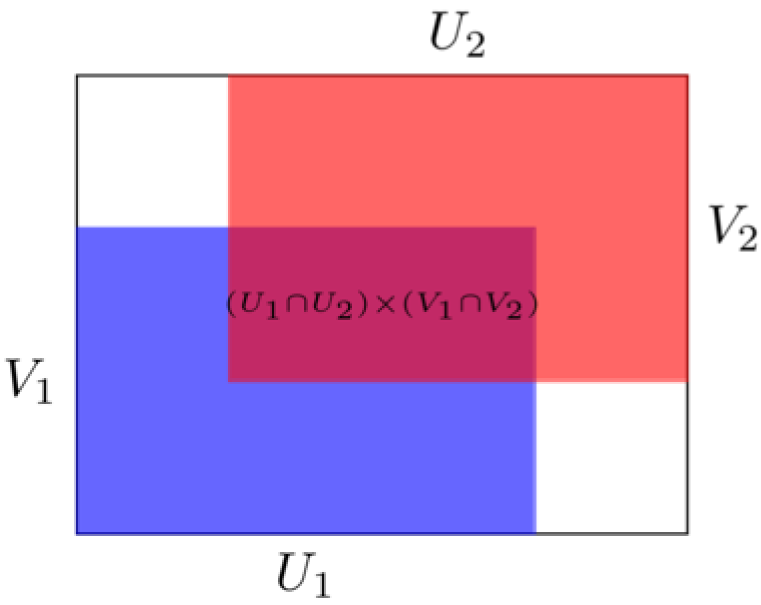
$O_1 \times X_2$,$X_1 \times O_2$ חייבים להיות מתוך טופולוגיה τ_π על $X_1 \times X_2$ על מנת להבטיח את הרציפות.

אז גם חיתוך (סופי) – $O_1 \times O_2 \in \tau_\pi$

הגדרה: $\gamma := \{O_1 \times \cdots \times O_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות בסיסיות"

("מלבנים פתוחים" $\gamma := \{O_1 \times O_2 \mid O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$ במקרה של $n=2$)

מקיים את התנאים: $\gamma^{\cap_F} = \gamma, X \in \gamma$



$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

לכן γ בסיס לטופולוגיה מסוימת $\gamma^{\cup}$. נגדיר

$$\tau_\Pi = \gamma^{\cup}$$

ז"א "קבוצה פתוחה" במכפלה טופולוגית = איחוד של תיבות בסיסיות.

שקול: $O \in \tau_\Pi \Leftrightarrow (x_1, \cdots, x_n) \in O \Rightarrow \exists O_i \in \mathrm{N}(x_i) \quad O_1 \times \cdots \times O_n \subseteq O$

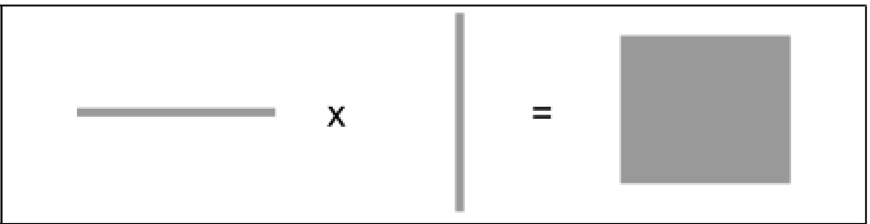
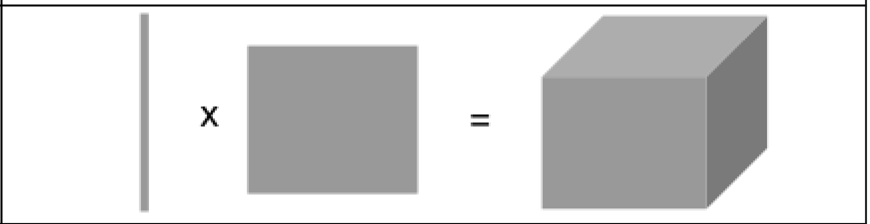
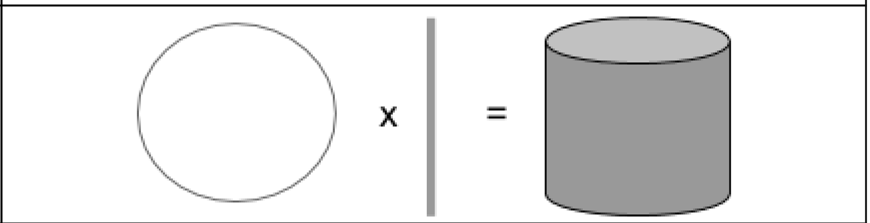
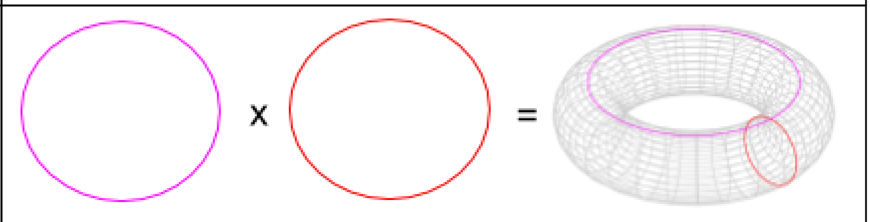
משפט: $X = (\prod_{i \in \{1,\cdots,n\}} X_i, \tau_\Pi)$ מ"ט ו τ_Π הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$\mathrm{p}_i : (\prod_{i \in \{1,\cdots,n\}} \mathrm{X}_i, \tau_\Pi) \to (\mathrm{X}_i, \tau_i) \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$$

בסיס סטנדרטי $\{O_1\times\cdots\times O_n \mid O_i\in\tau_i\}=:\gamma$ "תיבות בסיסיות". $\tau_\Pi=\gamma^{\cup}$.

פרא-בסיס סטנדרטי $\{p_i^{-1}(O_i)=X_1\times\cdots\times O_i\times\cdots\times X_n \mid O_i\in\tau_i\}=:\alpha$ "תיבות אלמנטריות". אז

$$\alpha^{\cap F}=\gamma \qquad \tau_\Pi=(\alpha^{\cap F})^{\cup}$$

$I^1 \times I^1 = I^2$	
$I^1 \times I^2 = I^3$	
$S^1 \times I^1$ = Cylinder	
$S^1 \times S^1$ = Torus	

טורוס n-ממדי $S_1^n=S_1\times\cdots\times S_1\simeq T^n$

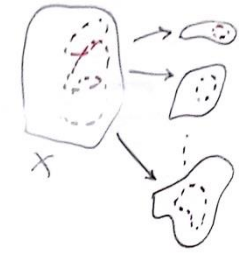
הוא בעל מימד n קומפקטי (לכן לא הומיאומורפי ל $\mathbb{R}^n$) אבל לכל נקודה יש סביבה

שהומיאומורפי ל $\mathbb{R}^n$ (ז"א T^n **לוקלית** הומיאומורפי ל $\mathbb{R}^n$).

מ"ל עבור $n=1$ (מדוע?)

<u>הגדרה:</u> טופולוגיה חלשה $(Weak\ Topology)$.

נניח X קבוצה. $(X_i,\tau_i)\in TOP$, $i\in I$ מ"ט ונתונה משפחה של פונקציות $X\overset{f_i}{\to}X_i$



קיימת טופולוגיה τ_w על X כך ש –

א. $(X_i,\tau_i)\overset{f_i}{\to}(X,\tau_w)$ רציפות.

ב. בהינתן ש – σ טופולוגיה מסוימת על X כך ש -

$(X_i,\tau_i)\overset{f_i}{\to}(X,\sigma)$ רציפות מתקיים – $\sigma\supseteq\tau_w$

(ז"א τ_w היא **הכי חלשה כך שמתקיים א'**).

τ_w נקראת **"טופולוגיה חלשה"**. הגדרה פורמלית:

$$\tau_w=(\alpha^{\cap_F})^{\cup}$$

כאשר $\alpha:=\{f_i^{-1}(O_i)\big|O_i\in\tau_i, i\in I\}$.

לפי הבנייה α פרא-בסיס ל - τ_w ו - $\gamma:=\alpha^{\cap_F}$ בסיס ל - τ_w.

דוגמאות של "טופולוגיה חלשה": מכפלה, תת-מרחב , טופולוגיה נקודתית, טופולוגיה שמוגדרת ע"י משפחת פסאודו-מטריקות, טופולוגיה חלשה במרחבים נורמיים ...

<u>משפט:</u> (טופולוגיה חלשה)

נניח (Y,σ) מ"ט ונתונה פונקציה $X\overset{g}{\to}Y$.

כמו קודם, τ_w מסמן טופולוגיה חלשה מעל X לגבי – $(X_i,\tau_i)\underset{i\in I}{\overset{f_i}{\to}}X$.

אזי $(X_i,\tau_i)\underset{i\in I}{\overset{f_i\circ g}{\to}}Y$ רציפות $\Leftrightarrow$ $(X,\tau_w)\overset{g}{\to}Y$ רציפה.

<u>הוכחה:</u>

<u>$(\Rightarrow)$:</u> ברור, כי הרכבה שומרת על רציפות.

<u>$(\Leftarrow)$:</u>

צ"ל $(X,\tau_w)\overset{g}{\to}Y$ רציפה.

ש"ל $\forall O\in\tau_w: g^{-1}(O)\in\sigma$.

מ"ל (על פרא-בסיס $=\alpha$). ז"א כאשר –

$$\exists i \in I: f_i^{-1}(O_i) = O \in \alpha$$

$$(f_i \circ g)^{-1}(O_i) = g^{-1}\left(f_i^{-1}(O_i)\right) = g^{-1}(O)$$

פתוחה בגלל <u>רציפות</u> של $f_i \circ g$.

■

<u>תוצאה:</u> τ_w הטופולוגיה הכי חלשה כך ש...

<u>הסבר:</u> זה נובע מהמשפט. אם ניקח $(X,\tau_w) \overset{g=id}{\rightarrow} X = Y$. מהרציפות נקבל $\sigma \supseteq \tau_w$.

<u>מקרים פרטיים של טופולוגיה חלשה:</u>

- תת מרחב טופולוגי:

$(X,\tau) \underset{\text{שיכון}}{\overset{i}{\hookrightarrow}} (Y,?)$ (Y תת קבוצה של X).

$$\tau_Y = \tau_w$$

שווה לטופולוגית תת מרחב (שכבר הגדרנו!).

<u>שימו לב:</u> $\forall O \in \tau \subseteq X: i^{-1}(O) = O \cap Y$

- **מכפלה טופולוגית של n גורמים** $(X_i,\tau_i)\ \ i \in \{1,\cdots,n\}$

$X = (\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i, \tau_\Pi)$ מ"ט ו τ_Π הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$p_i : (\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i, \tau_\Pi) \rightarrow (X_i,\tau_i) \quad (x_1,\cdots,x_n) \mapsto x_i$$

מתקיים $\tau_w = \tau_\Pi$ טופולוגית מכפלה כפי שהגדרנו ! $\tau_\Pi = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

כאשר $\{p_i^{-1}(O_i) = X_1 \times \cdots \times O_i \times \cdots \times X_n \mid O_i \in \tau_i\} =: \alpha$ פרא-בסיס "תיבות אלמנטריות".

- **הגדרה: מכפלה טופולוגית** (אין הגבלה) של $(X_i,\tau_i)\ \ i \in I$

$$X = \left\{ I \overset{x}{\rightarrow} \bigcup_{i\in I} X_i\,, x(i) \in X_i \right\} = \prod_{i\in I} X_i \overset{p_i}{\rightarrow} (X_i,\tau_i)$$

מכפלה קרטזית (כקבוצה). איבר טיפוסי "וקטור מוכלל" $x = (x_i)_{i\in I}$ (פונקציות)

היטלים: $p_{i_0}(x) = x(i_0) = x_{i_0}$

מגדירים $\tau_w = \tau_\Pi = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$ טופולוגיה חלשה (טופולוגית *Tychonoff*).

$\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \tau_i\}$ פרא-בסיס סטנדרטי "תיבות אלמנטריות".

$\gamma := \alpha^{\cap_F} = \{\text{תיבות בסיסיות}\} = \{\bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(O_j) \mid \text{סופי } J \subseteq I, O_j \in \tau_j\}$

בסיס סטנדרטי.

הערות:

א. $p^{-1}_i(O_i) = O_i \times \prod_{j\in I\setminus\{i\}} X_j$

ב. $p_i^{-1}(O_i) \cap p_k^{-1}(O_k) = O_i \times O_k \times \prod_{j\in I\setminus\{i,k\}} X_j$

ג. $p_k(\bigcap_{i\in J} p_j^{-1}(O_j)) = \begin{Bmatrix} O_k & if\ k \in J \\ X_k & if\ k \notin J \end{Bmatrix}$

ד. $O \in \tau_\Pi \Leftrightarrow x = (x_i)_{i\in I} \in O \Rightarrow \exists\ finite\ J \subseteq I\ \exists O_j \in \tau_j \quad x \in \bigcap_{i\in J} p_j^{-1}(O_j) \subseteq O$

שימו לב: תנאי $x \in \bigcap_{i\in J} p_j^{-1}(O_j)$ שקול ל $x_j \in O_j \quad \forall j \in J$.

- טופולוגיה המוגדרת דרך משפחת פסאודו-מטריקות:

א. תזכורת: אם ρ פסאודו מטריקה מעל קבוצה X אז

$$top(\rho) = \{\text{פתוחות במובן } \rho\} = \{B_\rho(x,r) \mid x \in X, r > 0\}^{\cup} = \gamma^{\cup}$$

ב. נניח שנתונה משפחה $\{\rho_i\}_{i\in I}$ של פסאודו-מטריקות על אותה קבוצה X.

מגדירים $\tau_w(\{\rho_i\}_{i\in I})$ כטופולוגיה חלשה של אוסף הפונקציות הזהות:

$$\left\{X \xrightarrow[i\in I]{id} (X, top(\rho_i))\right\} \quad (\forall i: f_i = id \text{ ז"א})$$

לכן – $\tau_w = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

כאשר – $\alpha := \{B_{\rho_i}(x,r) \mid x \in X, r > 0, i \in I\}$

"כדורים" פרא-בסיס ל - τ_w.

* <u>טופולוגיה נקודתית</u> על $X = C[0,1]$ (ניתן להכללות):

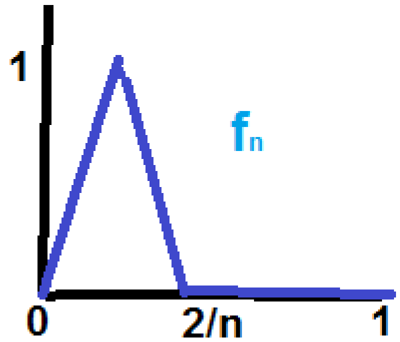
עבור $t \in [0,1]$ נגדיר פסאודו-מטריקה $\rho_t(f_1, f_2) = |f_1(t) - f_2(t)|$. נקבל

$$\{\rho_t\}_{t\in[0,1]}$$
$$\downarrow$$
$$\tau_w\left(\{\rho_t\}_{t\in[0,1]}\right) =: \tau_p$$

טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה נקודתית $(pointwise\ topology)$.

<u>הערה:</u> $(C[a,b], \tau_p) \subsetneq top(d_{max})$ לא מטריזבילית (אבל חשובה באנליזה).

$\tau_p \neq top(d_{\max})$. למשל סדרת הפונקציות $f_n \in C[0,1]$ הבאה (עם $f_n(\frac{1}{n}) = 1$)



מתכנסת בטופולוגיה נקודתית τ_p לפונקציית האפס אבל לא בטופולוגיה $top(d_{\max})$.

* <u>טופולוגיה p – אדית:</u> $n \in \mathbb{N}$ $top(d_p) = \tau_w\left\{\mathbb{Z} \underset{k\mapsto k+p^n\mathbb{Z}}{\overset{f_n}{\longrightarrow}} (\mathbb{Z}_{p^n}, discr)\right\}$

בעצם פונקציית האלכסון $\mathrm{f} = \Delta_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{f}_n : (\mathbb{Z}, \mathrm{d}_p) \to \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n}$ מגדיר שיכון טופולוגי.

($\mathbb{Z}_{p^n} = \{0,1,\cdots,\mathrm{p}^n - 1\}$ מסמן חבורה ציקלית סופית דיסקרטית עם p^n איברים).

הגדרה: $f : \mathrm{X} \to Y$ נקרה <u>**שיכון טופולוגי**</u> אם פונקציה מושרת $f : \mathrm{X} \to f(X)$ הומיאומורפיזם.

<u>**טענה:**</u> נניח $f_i : \mathrm{Y}_i \to \mathrm{X}_i$ פונקציות רציפות $\forall i \in I$.

הוכיחו "שפונקצית המכפלה" $f := \prod_{i\in I} f_i$ הבאה היא רציפה

$f((y_i)_{i\in I}) = (f_i(y_i))_{i\in I}$ $\quad f : \prod_{i\in I} Y_i \to \prod_{i\in I} X_i$.

הוכחה: הרעיון הוא להשתמש במשפט "טופולוגיה חלשה".

נגדיר $\mathrm{Y}:=\prod_{i\in I} Y_i, X=\prod_{i\in I} X_i$. נסמן ההטלות ב p_i^Y, p_i^X . אז יש לנו פונקציה $f:\mathrm{Y}\to X$ כך ש $p_i^X\circ f=f_i\circ p_i^Y$. נתון ש f_i רציפות. לכן גם $f_i\circ p_i^Y$ ששווה ל $p_i^X\circ f$.לפי המשפט הנ"ל אפשר להסיק ש f רציפה.

☺

תוצאה: אם כל גורם $f_i:\mathrm{Y}_i\to\mathrm{X}_i$ הומיאומורפיזם אז גם $f:\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$.

$\mathrm{Y}_i\simeq\mathrm{X}_i\Rightarrow\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} Y_i\simeq\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i$.

__דוגמה:__ $\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}\simeq(-1,1)\times(0,7)\times(5,\infty)\times\mathbb{N}^2$

__תרגיל:__ $\mathrm{S}_2\setminus\{\mathrm{z}\}\simeq(0,1)\times(2,4)$

__הסבר:__ $\mathrm{S}_2\setminus\{\mathrm{z}\}\simeq\mathbb{R}^2$ $\forall\mathrm{z}\in\mathrm{S}_2$ היטל סטראוגרפי.

מצד שני, $\mathbb{R}^2\simeq(0,1)\times(2,4)$ בגלל הטענה הקודמת ו- $\mathbb{R}\simeq(a,b)$.

__תרגיל:__ $X\times Y\simeq Y\times X$ (נסו להוכיח וגם להכליל).

משפט: נניח $f_i:\mathrm{Y}\to\mathrm{X}_i$ פונקציות רציפות.

הוכיחו "שפונקצית האלכסון" $f:=\Delta_{i\in I} f_i$ הבאה רציפה

$$f:Y\to X=(\prod_{i\in I} X_i,\tau_\Pi)\qquad f(y)=(f_i(y))_{i\in I}$$

רציפה ומתקיים $f_k=p_k\circ f$ $\forall k\in I$.

__הוכחה:__ $\forall\,\mathrm{y}\in\mathrm{Y}\quad(p_k\circ f)(\mathrm{y})=p_k(f(y))=p_k(f_i(\mathrm{y})_{i\in I})=f_k(y)$

נתון ש f_k רציפות (והוכחנו $f_k=p_k\circ f$). לכן לפי המשפט "טופולוגיה חלשה" גם f .

☺

__דוגמה:__ $\mathrm{f}_1:\mathbb{R}\to[-1,1],\mathrm{f}_1(t)=\cos t\quad\mathrm{f}_2:\mathbb{R}\to[-1,1],\mathrm{f}_2(t)=\sin t$

$\mathrm{f}=\mathrm{f}_1\Delta\mathrm{f}_2:\mathbb{R}\to[-1,1]\times[-1,1],\ \mathrm{f}(t)=(\cos t,\sin t)\quad\mathrm{f}(\mathbb{R})=\mathrm{S}_1$

משפט: (פתיחות הטלות)

כל הטלה $(\mathrm{X}_i,\tau_i) \to (\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} \mathrm{X}_i,\tau_{\prod}) : \mathrm{p}_i$ היא פונקציה **פתוחה**.

הוכחה: צ"ל $\mathrm{p}_k(\mathrm{O})\in\tau_k \quad \forall \mathrm{O}\in\tau_{\prod}$.

אם $\mathrm{O}\in\gamma$ תיבה בסיסית אז

$$\exists \text{ finite } \mathrm{J}\subseteq \mathrm{I} \quad \mathrm{O}=\bigcap_{i\in J} p_j^{-1}(O_j)$$

נשתמש בשוויון $p_k(O)=p_k(\bigcap_{i\in J} p_j^{-1}(O_j))=\begin{cases} O_k & if\ k\in J \\ X_k & if\ k\notin J\end{cases}$.

התמונה היא פתוחה. זה מוכיח מקרה של $O\in\gamma$.

במקרה כללי קחו בחשבון ש γ בסיס ל $\tau_{\prod}$ ותשתמשו ב t_3 (כל פונקציה שומרת איחודים).

הערה: הטלות בד"כ לא פונקציות סגורות. למשל $p_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ לא סגורה כי

$A=\{(x,\frac{1}{x}) \mid x>0\}$ סגורה ב $\mathbb{R}^2$ אבל $p_1(\mathrm{A})=(0,\infty)$ לא סגורה ב $\mathbb{R}$.

הרצאה 10

<u>אזהרה:</u> מכפלה קרטזית של קבוצות פתוחות לא תמיד פתוחה

$\left(\frac{1}{2},3\right)^{\mathbb{N}}=\left(\frac{1}{2},3\right)\times\left(\frac{1}{2},3\right)\times\ldots$ **לא פתוחה** ב - $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$(a,b)^{\mathbb{N}}$ <u>לא פתוחה</u> ב – $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

<u>הסבר:</u> $X=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots$

כאן $I=\mathbb{N}$ $\quad (X_n,\tau_n)=\mathbb{R}$

אם נניח בשלילה ש - $(a,b)^{\mathbb{N}}$ פתוח, אז – $(a,b)^{\mathbb{N}}\in\tau_\pi=\gamma^{\cup}$. לכן

$\Leftarrow (a,b)^{\mathbb{N}}$ מכיל תיבה בסיסית לא ריקה.

לכן הוא מכיל $\ldots \times \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times O_m\times\ldots\times O_2\times O_1 \subseteq \ldots\times(a,b)\times(a,b)$.

אבל זה גורר $\mathbb{R}\subseteq(a,b)$, סתירה!

<u>טענה שימושית</u>: במכפלה סופית אם γ_i בסיס ל τ_i אז $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ בסיס ל $\tau_{\prod}$.

עבור מכפלה אינסופית: $\{\bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(O_j) \mid J \subseteq I, O_j \in \gamma_j \text{ סופי}\}$

שאלה חשובה: מתי תכונה נשמרות ע"י מכפלה טופולוגית (סופית, אינסופית) ?

- (תמיד ללא הגבלת מספר הגורמים)

$T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$, קשירות, קשירות מסילתית, קומפקטיות (משפט *Tychonoff*) ...

- (מכפלות סופיות ובנות מניה)

$\cdots, Sep, B_1, B_2, Metriz, \cdots$

- (מכפלות סופיות)

$LComp, \quad discr$ (קומפקטיות מקומית)

<u>הגדרה:</u> מ"ט X הוא **קומפקטי מקומית** אם לכל נקודה יש סביבה קומפקטית.

שקול: לכל נקודה יש סביבה שהסגור שלה קומפקטי. נסמן: $X \in LComp$.

דוגמאות: מרחב דיסקרטי, $\mathbb{R}^n$, כל תת קבוצה פתוחה במרחב קומפקטי T_2 ...

תרגיל: $\mathbb{Q} \notin LComp$.

<u>הערה:</u> "קומפקטיות מקומית" לא נשמרת ע"י מכפלה <u>אינסופית</u> (סופית – כן!).

<u>תרגיל:</u> $\mathbb{R}^n \in LComp$ אבל $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \notin LComp$.

הסבר: כל סביבה $V \in N(x)$ של כל נקודה $x = (x_1, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ מכילה תיבה בסיסית $U := U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ ב $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

לכן הטלה $p_{m+1}(V) = p_{m+1}(\mathrm{U}) = \mathbb{R}$ עם תמונה רציפה $\mathbb{R}$ (שהיא לא קומפקטית) ...

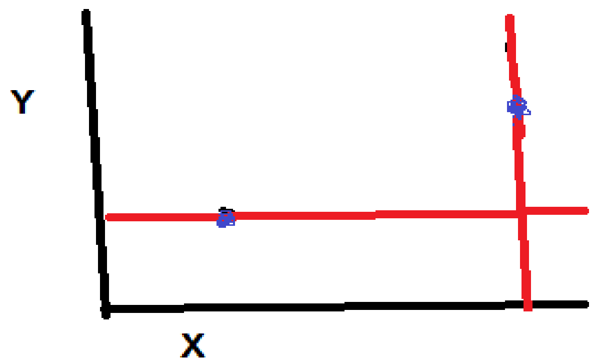
<u>הערה</u>: דיסקרטיות לא נשמרת ע"י מכפלה אינסופית בת מנייה.

למשל $\mathrm{C} \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \notin discr$ הומיאומורפי לקבוצת קנטור.

<u>תרגיל</u>: א. $\{x\} \times Y \simeq Y \quad X \times \{y\} \simeq X$.

ב. הוכיחו $X, Y \in Conn \Leftrightarrow X \times Y \in Conn$.

רמז: כדאי להיעזר ב (א) ובמשפט האלומות (השירשור).



<u>הערה:</u> מכפלה סופית שומרת על מטריזביליות (נכון גם למכפלה בת מניה).

$$(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2)\in Metr$$

$$\to \left(X_1,\underbrace{top(\rho_1)}_{\tau_1}\right),\left(X_2,\underbrace{top(\rho_2)}_{\tau_2}\right)\in TOP$$

<u>טענה:</u> יש התאמה עם הגדרת טופולוגית τ_π - "מטריקת מכפלה".

א) "מטריקה בסגנון אוקלידס" –

$$d(x,y)\coloneqq\sqrt{\rho_1(x_1,y_1)^2+\rho_2(x_2,y_2)^2}$$

ב) $d_1(x,y)\coloneqq\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2)$

ג) $d_{max}(x,y)\coloneqq\max\{\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2)\}$

- <u>תרגיל:</u>

א) $d\sim d_1\sim d_{max}$ מ - $X\coloneqq X_1\times X_2$.

ב) $\underbrace{top(d)=top(d_1)=top(d_{max})}_{(א)\Rightarrow}=\underbrace{\tau_\pi}_{\text{טופולוגית מכפלה}}$

<u>מטריזציה במקרה של מכפלה בן מנייה:</u>

$$X=\prod_{i\in\mathbb{N}}(X_i,\rho_i)=X_1\times X_2\times\cdots$$

$d(x,y)\coloneqq\sup\{\frac{1}{2^i}\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)}\mid i\in\mathbb{N}\}$ אחת מהאפשרויות.

- <u>תרגיל:</u> לכל פונקציה רציפה $X\xrightarrow{f}Y$ מתקיים ש

$.X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x, f(x)) | x \in X\}}_{\text{תת מרחב טופלוגי}} \subset X \times Y$

רמז: כדאי להשתמש בפונקצית ההטלה.

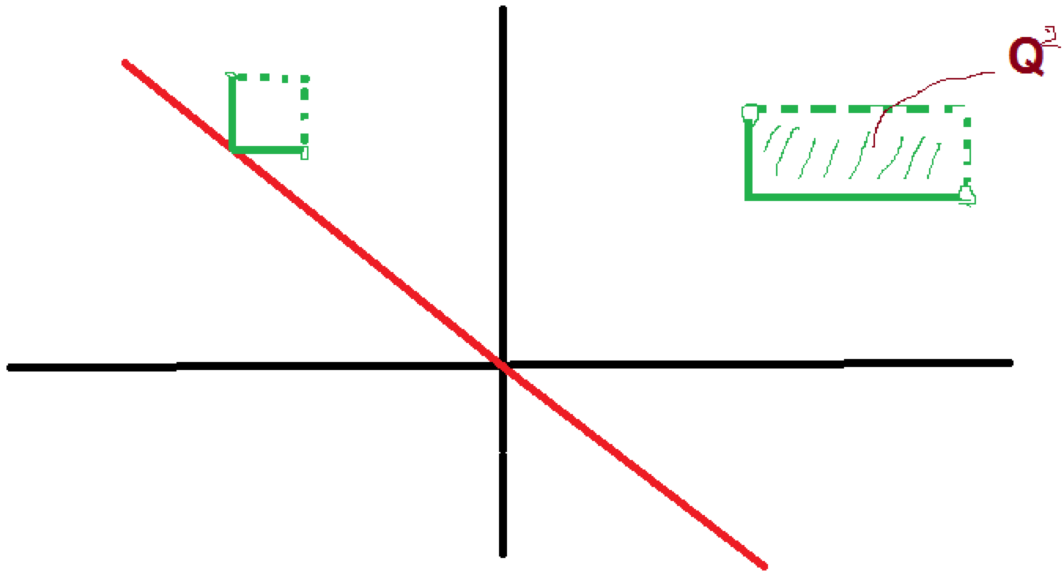
- תרגיל: הוכיחו $X \in T_2 \Leftrightarrow \Delta_X := \{(x,x) \mid x \in X\}$ סגור ב $X \times X$.
- תרגיל:* הוכיחו שאם $f : X \to Y$ רציפה ו $Y \in T_2$ אז $Gr(f)$ סגור ב $X \times Y$

שאלה: האם יש קשר בין שני התרגילים הקודמים ?

- תרגיל:* הוכיחו: $cl(\prod_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} cl(A_i)$ לכל $A_i \subseteq (X_i, \tau_i)$.
- תרגיל: * "מישור סורגנפראי" $(\mathbb{R}, \tau_s)^2 \in Sep$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי.

רמז: $\{[a, a+\varepsilon) \times [b, b+\delta) : a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \delta > 0\}$

בסיס למישור סורגנפראי ....



הגדרה: נניח $(G,\cdot)$ חבורה ו - (G,τ) מ"ט.

אומרים ש - $(G,\cdot,\tau) \in TGr$ חבורה טופולוגית $(Topological\ Group)$ אם מתקיים:

א. "כפל" $G \times G \xrightarrow{\cdot} G \quad (a,b) \longmapsto a \cdot b$ פונקציה רציפה.

שקול: $\forall a,b \in G\ \forall U \in N(ab)\ \exists V_1 \in N(a), V_2 \in N(b) \quad V_1V_2 \subseteq U$

ב. "ההיפוך": $a \longmapsto a^{-1} \quad G \to G$ פונקציה רציפה.

שקול: $\forall a \in G\ \forall U \in N(a) \quad U^{-1} \in N(a^{-1})$

תרגיל: לנסח בעזרת סדרות מתכנסות אם G מטריזבילי (או B_1).

דוגמאות:

- כל מרחב נורמי $(E,\|\cdot\|)$ מגדיר חבורה טופולוגית $\left(E,+,\tau_{\|\cdot\|}\right)$
- $\left(\mathbb{Z},+,\tau_p\right)$
- כל חבורה בטופולוגיה דיסקרטית

הערה: בהגדרת של TGr - (א) $\not\Leftarrow$ (ב).

למשל $\left(\mathbb{R},+,\tau_s\right)$ בטופולוגית סורגנפראי.

תזכורת: $\mathbb{R} \supseteq O \in \tau_s \overset{def}{=} \forall\, x \in O\ \exists \epsilon > 0: [x, x+\epsilon) \subseteq O$

למשל – $[0,1) \in \tau_s$ פתוחה אבל לא $(-1,0]$ (שהוא מקור של $[0,1)$).

הסבר נוסף: $\lim \frac{1}{n} = 0$ *but* $\lim(-\frac{1}{n}) \neq 0$.

תרגיל: הוכיחו שכל חבורה טופולוגית היא הומוגנית.

לסקרנים:

- (על חבורות טופולוגיות)

באתר http://u.math.biu.ac.il/~megereli/seminar.html ראו קבצים :

http://u.math.biu.ac.il/~megereli/IntroTopGr.pdf

http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TGrNotes070217.pdf

http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TGrEx.pdf

- (על מכפלה טופולוגית) https://en.wikipedia.org/wiki/Product_topology

קומפקטיות "הכללה גאונית של סופיות"

(תזכורת): מרחב טופולוגי הוא **קומפקטי** אם לכל כיסוי פתוח שלו יש תת כיסוי סופי.

תכונות ודוגמאות:

- כל מרחב סופי הוא קומפקטי.
- $Comp \ni \left(X, \tau_{cofinite}\right)$

הסבר: קבוצה קוסופית היא מכסה כמעט הכל פרט אולי למספר סופי של נקודות.

- $X \; is \; finite \Leftrightarrow (X, \tau_{discr}) \in \text{Comp}$

<u>*הסבר:*</u> $\{\{x\} : x \in X\}$ כיסוי פתוח של X.

- **<u>הגדרה:</u>** תת קבוצה Y במרחב X נקראת **קומפקטית** אם $(Y, \tau_Y) \in \text{Comp}$.

<u>משפט (קריטריון לתת קבוצה קומפקטית):</u> התנאים הבאים שקולים:

א) Y תת קבוצה קומפקטית ב – X.

ב) לכל אוסף $\alpha = \{O_i\}_{i \in I}$ של קבוצות פתוחות ב – X שמכסה את Y

(ז"א $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$) קיים תת אוסף <u>סופי</u> $\{O_j\}_{j \in J}$, $J \subseteq I$ סופי שמכסה את Y

(ז"א $Y \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$).

<u>הסבר:</u> נובע מהגדרת תת מרחב טופולוגי.

- איחוד סופי תת קבוצות קומפקטיות גם קומפקטי.

<u>תרגיל</u>: תת קבוצות $Q, \; Q \cap [0,1]$ לא קומפקטיות. (רמז: משפט Heine-Borel)

<u>תרגיל</u>: $Y = [0,1]$ בקו סורגנפראי $(\mathbb{R}, \tau_s)$ לא קומפקטי.

פתרון: נקודון $\{1\}$ מבודד ב Y. כיסוי $\{1\}$ כיסוי $\alpha := \bigcup_{n \geq 2} [0, \frac{n-1}{n}) \cup \{1\}$ כיסוי פתוח ("בעייתי") של Y ללא תת כיסוי סופי.

- **<u>משפט:</u>** אם (X, d) מ"מ קומפקטי (ז"א $(Comp \ni \big(X, top(d)\big)$ אזי

א. (X, d) חסום כליל (ולכן גם חסום).

ב. $X \in Sep$

ג. $X \in B_2$

ד. העוצמה של X היא לכל היותר עוצמה של ממשיים.

<u>הוכחה</u>: א **תזכורת:** לכל ε-כיסוי $\{B(x, \varepsilon) : x \in X\}$ יש תת כיסוי סופי.

ב. כל חסום כליל הוא ספרבילי

(כי אם A_ε סופי ו- ε-צפוף ב (X, d) אז $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}$ בת מניה וצפופה ב X).

ג. במרחבים מטריזביליים ספרביליות ו B_2 שקולות.

ד. **<u>טענת</u>**: כל מרחב מטריזבילי וספרבילי בעל עוצמה לכל היותר עוצמה של ממשיים.

ניקח תת קבוצה צפופה (ז"א $cl(A)=X$) בת מניה A ב X. בגלל המטריזביליות $\mathrm{scl(A)}=\mathrm{cl(A)}$. לכן נקבל $\mathrm{scl(A)}=X$.

לכל איבר $x\in X$ נבחר בסדרה אחת $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש $a_n\in A,\ x=\lim a_n$. נגדיר פונקציה

$$\sigma:\mathrm{X}\to\mathrm{P(A)}\quad \sigma(x)=\{a_n\,|\,\mathrm{n}\in\mathbb{N}\}\subseteq \mathrm{A}$$

זאת פונקציה **<u>חח"ע</u>**. לכן $card(X)=\mathrm{card}(\sigma(\mathrm{X}))\le card\ P(\mathrm{A})\le 2^{\aleph_0}=card\,\mathbb{R}$.

■

<u>הערה:</u> אפשר להוכיח את החסימות ישר כך:

ניקח $z\in X$, אז – $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n(z)$

כיסוי פתוח. יש תת כיסוי <u>סופי</u> ואז – $\exists n_0: X=B_{n_0}(z)$ לכן

$$diam\,X\le 2n_0$$

- **<u>הערה:</u>** קומפקטיות לא תורשתית – $\underbrace{(0,1)}_{\notin Comp}\subset\underbrace{[0,1]}_{\in Comp}$

($\alpha:=\{(\frac{1}{n},1):n\in\mathbb{N}\}$ כיסוי פתוח "בעייתי" של $(0,1)$)

אבל יש תורשתיות קומפקטיות לגבי תת קבוצות <u>סגורות</u>.

<u>משפט:</u> נניח $X\in Comp$, $Y\subseteq X$ תת קבוצה <u>סגורה</u>. אז גם $Y\in Comp$.

<u>הוכחה:</u>

נניח $\alpha=\{O_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות פתוחות ב – X כך ש – $Y\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i$

<u>הרעיון:</u> להוסיף Y^c (קבוצה פתוחה) לאוסף α ואז מתקבל אוסף חדש $\alpha^*=\alpha\cup\{Y^c\}$. הוא בעצם <u>כיסוי פתוח</u> של X.

$X\in Comp \Leftarrow$ קיים תת כיסוי <u>סופי</u> $\gamma\subseteq\alpha^*$. Y^c לא משתתף בכיסוי של Y לכן אם מורידים Y^c מ – γ (בתנאי שהוא נמצא שם) אז עדיין נקבל כיסוי של Y. לכן נקבל תת אוסף סופי ל – α (ולא ל - α^*) שמכסה את Y. אז $Y\in Comp$ עפ"י קריטריון לתת קבוצות.

■

<u>משפט:</u> תמונה רציפה שומרת על $Comp$.

<u>הוכחה:</u> $X\in Comp$. f רציפה ועל $f(X)=Y$. צ"ל $Y\in Comp$.

נניח $\alpha=\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של Y. צ"ל – קיים כיסוי <u>סופי</u>.

$\Leftarrow Y = \bigcup_{i\in I} O_i$

$X = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} O_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$.

$\{f^{-1}(O_i)\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X ($f^{-1}(O_i)$ פתוח בגלל ש – f רציפה).

$X \in Comp \Leftarrow$ קיים תת כיסוי סופי ל - $\{f^{-1}(O_i)\}_{i\in I}$, ז"א קיים $J \subseteq I$ סופי כך ש –

$$X = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(O_j)$$

אז מכאן – $Y = f(X) = f\left(\bigcup_{j\in J} f^{-1}(O_j)\right) = \bigcup_{j\in J} f(f^{-1}(O_j)) = \bigcup_{j\in J} O_j$

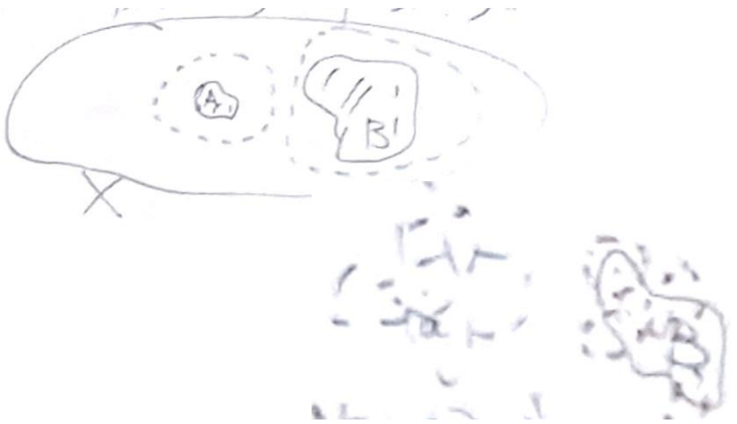
(תמיד $ff^{-1}(A) \subseteq A$ אבל אם f על אז $ff^{-1}(A) = A$)

מצאנו תת כיסוי סופי $\{O_j\}_{j\in J}$ ל – α.

■

<u>תרגיל:</u> נניח $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו $f([a,b]) = [c,d]$.

<u>משפט (ההפרדה):</u> נניח $X \in T_2$, A, B תת קבוצות קומפקטיות וזרות. אזי קיימת סביבות (פתוחות) זרות.



<u>הוכחה:</u>

<u>מקרה א'</u> – $A = \{a\}$

<u>הערה:</u> קל להוכיח בהנחה נוספת אם B סופית (חיתוך סופי).

הרעיון הוא להפעיל את הקומפקטיות של B ...

$$X \in T_2 \Rightarrow \boxed{\forall b \in B\ \exists U_b \in N(a)\ \exists V_b \in N(b): U_b \cap V_b = \emptyset}$$

U_b ו - V_b סביבות פתוחות.

$\alpha = \{V_b\}_{b\in B}$ כיסוי פתוח של תת קבוצה B במרחב X.

בגלל קריטריון (3) $\Leftarrow$ קיים תת כיסוי <u>סופי</u> –

$$\exists \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq B: B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i} \underbrace{=:}_{\text{נסמן}} V \in N(B)$$

V סביבה פתוחה של B. נגדיר בהתאמה –

$$N(a) \ni U \coloneqq \bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}$$

מ - (t_2) נקבל שזוהי סביבה פתוחה של a. כעת, לכל $i \in \{1, \dots, n\}$ –

$$U_{b_i} \cap V_{b_i} = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}\right) = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$U \cap V = \emptyset$$

הוכחנו את מקרה א'.

<u>מקרה ב' (כללי)</u> –

בעזרת שלב א':

$$\forall a \in A\ \exists U_a \in N(a)\ \exists V_a \in N(B): U_a \cap V_a = \emptyset$$

כאשר U_a, V_a סביבות פתוחות. $\alpha = \{U_a\}_{a \in A}$ כיסוי פתוח של A במרחב X.

$$X \supseteq A \in Comp$$

לכן שוב לפי הקריטריון יש תת כיסוי סופי

$$\exists \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A: N(A) \ni U \coloneqq \bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i} \supseteq A$$

נגדיר – $N(B) \ni V \coloneqq \bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i} \supseteq B$ V פתוח בגלל - (t_2).

$$U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i}\right) = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$U \cap V = \emptyset$$

■

- **<u>משפט (הסגירות):</u>** נניח $X \in T_2$, $Y \subset X$ תת קבוצה קומפקטית. אזי Y סגורה ב – X.

<u>הוכחה:</u>

ניקח $a \notin Y$ (בה"כ קיימת!).

צ"ל – $a \notin \bar{Y}$.

לפי משפט ההפרדה, קיימות סביבות פתוחות וזרות $U \in N(a), V \in N(Y)$ כך ש

$$U \cap V = \emptyset$$

$$U \cap Y = \emptyset$$

ולכן $a \notin \bar{Y}$ ולכן Y סגור.

■

<u>משפט (הנורמליות):</u>

$$X \in T_4 \Leftarrow \begin{cases} X \in T_2 \\ X \in Comp \end{cases}$$

<u>הוכחה:</u> A, B תת קבוצות סגורות וזרות. $A, B \in Comp$

(כתת קבוצה סגורה בקומפקטי). אז לפי משפט ההפרדה קיימות סביבות זרות.

■

<u>משפט:</u> נניח $X \in Comp$, $Y \in T_2$, $f: X \to Y$ רציפה. אזי f פונקציה **סגורה**.

<u>הוכחה:</u>

צ"ל $f(A)$ סגורה ב – Y לכל A סגורה ב – X.

$$\underbrace{A}_{\text{סגור}} \subseteq X \in Comp$$

אז לפי משפט שהוכחנו $A \in Comp$.

לפי משפט – תמונה רציפה שומרת על $Comp$. נקבל (מהתורשתיות של רציפות גם) –

$$T_2 \ni Y \supseteq f(A) \in Comp$$

$f(A)$ סגור לפי משפט שהוכחנו (סגירות של פונקציה ...).

■

<u>משפט (הכללת משפט ויירשטראס):</u> נניח $X \in Comp$, $f: X \to \mathbb{R}$ רציפה. אזי f חסומה ומקבלת Max, Min מוחלטים.

<u>הוכחה:</u>

$Comp$ נשמרת ע"י תמונה רציפה. לכן – $\mathbb{R} \supset f(X) \in Comp$

$f(X)$ תת מרחב מטרי ב - $\mathbb{R}$, אז $f(X)$ חסומה!

$$\mathbb{R} \ni B \coloneqq \sup\{f(x) | x \in X\} \in \overline{f(X)}$$

$$\mathbb{R} \ni A \coloneqq \inf\{f(x) | x \in X\} \in \overline{f(X)}$$

מצד שני, $f(X)$ סגור בגלל משפט הסגירות (כלומר $f(X) = \overline{f(X)}$) ולכן מתקבלים

$$B = Max\ f$$

$$A = Min\ f$$

■

<u>תרגילים:</u>

1) נניח (X, d) מ"מ, $A, K \subseteq X$ לא ריקות, $K \in Comp$. אזי:

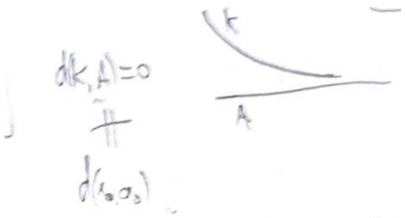
א) קיימת נקודה $x_0 \in K$ כך ש – $\boxed{d(K, A) = d(x_0, A)}$

<u>רמז:</u> פונקציית המרחק...

ב) אם גם $A \in Comp$, אז – $\exists a_0 \in A, \exists x_0 \in K: \boxed{d(K, A) = d(x_0, a_0)}$

<u>דוגמה נגדית</u> (אפילו לקבוצות סגורות):

ב - $\mathbb{R}^2$:



ב - $\mathbb{R}$: $\underbrace{B = \left\{n + \frac{1}{2n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}, A = \mathbb{N}}_{\text{סגורות}}$

$0 = d(A, B) \neq d(a_0, b_0)$ (לכן inf לא מתקבל!)

הרצאה 11

<u>משפט (על השיכון והומיאומורפיזם):</u>

נניח $X \in Comp$, $Y \in T_2$, $f: X \to Y$ רציפה <u>וחח"ע</u>. אזי f <u>שיכון טופולוגי</u>

(ז"א $f: X \to f(X)$ הומיאומורפיזם).

<u>הוכחה:</u> מ"ל את המשפט בהנחה ש – f <u>על</u>. ואז צ"ל f הומיאומורפיזם.

תנאים (1) ו – (2) בהגדרת הומיאומורפיזם מתקיימים עפ"י הנתון (ישר).

3) רציפות של ההופכי – $X \xleftarrow{f^{-1}} Y = f(X)$

לפי קריטריון 3 על רציפות, מספיק להראות ש – f פונקציה סגורה. כאן נשתמש במשפט הקודם.

■

<u>הערה:</u> א. במקרה הפרטי, אם בנוסף f <u>על</u> אז נקבל הומיאומורפיזם.

ב. קומפקטיות של X חשובה מאוד. ראינו דוגמאות...

ג. $f(X)$ סגור.

<u>תוצאה</u>: נניח $(X,\tau)\in \mathrm{Comp}$ ו σ טופולוגיה על X עם תכונת T_2 $(Hausdorff)$ כך ש $\sigma\subseteq\tau$. אז $\sigma=\tau$.

<u>הגדרה:</u> נניח $\alpha=\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף תת קבוצות בקבוצה X.

א) $\boldsymbol{\alpha\in FIP}$ תכונת החיתוך הסופי, אם – $\bigcap_{j\in J}A_j\neq\emptyset$ לכל $J\subseteq I$ **<u>סופית</u>**.

ב) $\boldsymbol{\alpha\in IP}$ אם $\bigcap_{i\in I}A_i\neq\emptyset$.

(ברור ב ⇐ א).

<u>דוגמה:</u> כל סדרה $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ יורדת $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots$ של קבוצות לא ריקות היא FIP

למשל: $A_n:=\{n,n+1,n+2,\dots\},n\in\mathbb{N}$

$\alpha=\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in FIP\backslash IP$

<u>משפט (קריטריון FIP של $Comp$):</u> נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X\in Comp$.

2) $$\begin{cases}FIP\ni\alpha=\{A_i\}_{i\in I}\\ \forall i\in I:\text{סגורה } A_i\end{cases}\Rightarrow\alpha\in IP$$

<u>הוכחה:</u>

שימו לב ש - $\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X אם ורק אם האוסף של המשלימים $\{O_i^c\}_{i\in J}$ (קבוצות סגורות) הוא לא IP.

$$\bigcup O_i=X\leftrightarrow\bigcap O_i^c=\emptyset$$

כללי $de\ Morgan$ והגדרת $Comp$...

■

<u>דוגמה:</u> $\mathbb{R}\notin Comp$ (דרך FIP).

$A_n:=[n,\infty),n\in\mathbb{N}$ סגורות ו- $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$

$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in FIP\backslash IP$

<u>דוגמה</u>: $Y=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}\notin \text{Comp}$

$A_k=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N},k\le n\}$ סגור $A_1\supset A_2\supset\cdots$ $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k=\varnothing$.

תזכורת: <u>קריטריון $Cantor$ לשלמות מאינפי</u>:

התנאים הבאים שקולים:

א) (X,d) מ"מ <u>שלם</u>.

ב) לכל סדרה יורדת $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - $A_1\supseteq A_2\supseteq A_3\supseteq\cdots$

של קבוצות <u>סגורות </u>כך ש – $diam(A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ מתקיים –

$$\{c\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\neq\emptyset$$

<u>משפט:</u> כל מרחב מטרי (X,d) קומפקטי הוא מ"מ שלם.

<u>הסבר:</u> (דרך קריטריון קנטור + קריטריון FIP)

נניח נתונה סדרה יורדת של קבוצות סגורות $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - $A_1\supseteq A_2\supseteq A_3\supseteq\cdots$

כך ש $diam(A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. אז

$$\alpha=\{A_n\}\in FIP$$

A_n סגור. לכן בגלל הקומפקטיות אכן $\bigcap_{n\in I}A_n\neq\emptyset$.

$$\Downarrow$$

$$\alpha\in IP$$

ואז מקריטריון קנטור נקבל המרחב הוא שלם.

$\blacksquare$

<u>משפט $(Heine-Borel)$:</u>

נניח $X\subseteq\mathbb{R}^n$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X\in Comp$.

2) X חסום וסגור.

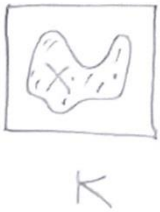
<u>הוכחה:</u>

<u>$(1)\Leftarrow(2)$:</u>

<u>חסימות</u> – כל מ"מ קומפקטי הוא חסום (הוכחנו יותר: ח"כ)

<u>סגירות</u> – $\mathbb{R}^n \in T_2$. נפעיל את משפט הסגירות.

<u>$(2) \Rightarrow (1)$:</u>



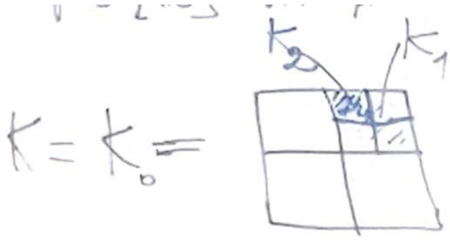
נניח X חסום וסגור. קיימת קובייה $K \subset \mathbb{R}^n$ כך ש – $X \subseteq K$

<u>דרך א':</u> בה"כ $K = [a,b]^n$

אז לפי $Tychonoff$, אכן $K \in Comp$ (אם ידוע ש - $[a,b] \in Comp$).

<u>דרך ב' ($Cantor$):</u>

נניח בשלילה ש - $Comp \not\ni K$.



ז"א יש כיסוי α פתוח של K ללא תת כיסוי סופי.

נחלק תתי קוביות (מספר $= 2^n$) דרך החלוקה של הצלעות. נקרא לתת קובייה – "קובייה בעייתית" אם אין תת כיסוי סופי עבור הכיסוי הנ"ל. אז יש לפחות תת קובייה אחת בעייתית K_1.

באופן דומה נחלק לתתי קוביות ואז יש תת קובייה $K_1 \supset K_2$ כך ש - K_2 בעייתית.

אז נקבל – $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$

סדרה יורדת של קוביות (סגורות לא ריקות).

$$diam(K_i) \to 0$$

$\mathbb{R}^n$ שלם, לכן לפי קריטריון קנטור: יש איבר משותף $\{c\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$

$c \in K$. לכן קיים איבר מסוים של הכיסוי $O_j \in \alpha$ כך ש – $c \in O_j$

בגלל הפתיחות $\exists r > 0: B_r(c) \subset O_j$

לכן – $\exists m \in \mathbb{N}: c \in K_m \subset B_r(c) \subset O_i$

קיבלנו ש K_m מכוסה ע"י איבר אחד O_i של הכיסוי.

לכן K_m לא בעייתית בסתירה לבנייה!

■

<u>**הערה:**</u> משפט $Heine - Borel$ בד"כ לא נכון אם מחליפים $\mathbb{R}^n$ במרחבים מטריים או נורמיים אחרים.

<u>**דוגמה:**</u> (כבר דיברנו על זה)

במרחב הילברט l_2 יש תת קבוצה חסומה וסגורה לא קומפקטית.

<u>למשל:</u> $A := \{e_1, e_2, \dots\} \subset l_2$ (דיסקרטי אינסופי לכן לא קומפקטי).

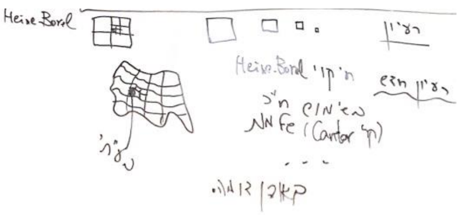
<u>משפט (קומפקטיות במרחב מטרי):</u> נניח (X,d) מ"מ. התנאים הבאים שקולים:

1) $X=\left(X,top(d)\right)\in Comp$.

2) $X\in SComp$ (לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת).

3) $X\in BW$ (תכונת Bolzano-Weierstrass לכל קבוצה <u>אינסופית</u> ב- X יש נקודת הצטברות).

4) (X,d) שלם וחסום כליל.



<u>הוכחה:</u>

<u>$(1) \leftarrow (4)$:</u>

דומה למשפט $Heine-Borel$

(נדלג על הוכחה מפורשת)

<u>$(2) \leftarrow (1)$:</u>

נניח בשלילה שלא, כלומר $X\notin SComp$.

זאת אומרת, קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ללא ת"ס מתכנסת ב $-X$.

נגדיר – $\emptyset\neq A_n:=\{x_n,x_{n+1},\dots\}$

ברור $A_1\supset A_2\supset\cdots A_n\supset\cdots$ לכן $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in FIP$.

<u>הערה:</u> A_n סגורות. זה נובע מ –

1) <u>במ"מ</u> ידוע ש - $cl(A)=scl(A)$.

2) פרמוטציה של סדרה לא משפיעה על ההתכנסות (או אי התכנסות)

(כאשר אנו משתמשים בהגדרת התכנסות דרך – בכל כדור של הגבול יש <u>כמעט כל האיברים</u>).

כעת – $\begin{cases}X\in Comp\\ FIP\ni\{A_n\}\end{cases}\Rightarrow\{A_n\}\in IP$

זה גורר שקיימת נקודה $c\in\bigcap A_n\neq\emptyset$.

לכן קיימת תת סדרה קבועה $c,c,\dots$ של הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (בסתירה להנחה שאין ת"ס מתכנסת).

<u>$(3) \leftarrow (2)$:</u>

נניח $A\subseteq X$ <u>אינסופית</u>. צ"ל $A'\neq\emptyset$.

בגלל אינסופיות קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב $-A$ עם איברים <u>שונים</u>.

$X\in SComp \Leftarrow$ קיימת תת סדרה $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ שמתכנסת ב $-X$.

$$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=b\wedge a_{n_k}\ \text{שונים}$$

$$\Downarrow$$

$$b\in A'$$

$$\Downarrow$$

$$A' \neq \emptyset$$

<u>$(3) \Leftarrow (2)$:</u>

נניח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב – X. נוכיח שיש ת"ס מתכנסת.

נגדיר – $X \supset A \coloneqq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (תמונה של הסדרה).

אם A <u>סופית</u> אז יש איבר בסדרה שחוזר אינסוף פעם ואז יש תת סדרה קבועה (מתכנסת!).

אם A <u>אינסופית</u> אז לפי הנתון (3): $X \in BW$.

אז קיימת נקודת הצטברות $z \in A'$.

(*) אז קיימת סדרה עם איברים שונים ב – A ששואפת ל – z.

ע"פ אותה הערה על הפרמוטציות...

בה"כ ניתן להניח שיש <u>תת סדרה</u> של $\{x_n\}$ המקיימת את (*).

לכן קיבלנו ת"ס מתכנסת!

<u>$(2) \Leftarrow (4)$:</u>

- קודם כל נוכיח <u>שלמות</u> של (X, d)

נניח $\{x_n\}$ <u>סדרת קושי</u>. צ"ל שהיא מתכנסת.

תכונה (2) $\Leftarrow$ יש תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ שמתכנסת ב – X.

תכונה m_3 של מרחבים מטריים $\Leftarrow$ אם לסדרת קושי יש ת"ס מתכנסת, אז גם הסדרה מתכנסת.

- כעת נוכיח ש - (X, d) ח"כ.

צ"ל שלכל $0 < \varepsilon$ יש תת קבוצה סופית שהיא ε – צפופה (רשת).

נניח בשלילה שקיים $0 < \varepsilon_0$ כך שאין ε_0 – רשת. בונים סדרה ללא ת"ס מתכנסת:

ניקח $x_1 \in X$ אז $X \neq B_{\varepsilon_0}(x_1)$ (אחרת $\{x_1\}$ ε_0 – רשת ב - (X, d)).

ניקח $x_2 \neq B_{\varepsilon_0}(x_1)$. אז מתקיים – $B_{\varepsilon_0}(x_1) \cup B_{\varepsilon_0}(x_2) \neq X$

אחרת $\{x_1, x_2\}$ ε_0 – רשת (שימו לב: $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$).

נמשיך כך... נקבל סדרה ... $x_1, x_2, x_3,$.

$$\forall i \neq j : d(x_i, x_j) \geq \varepsilon_0$$

אז ברור שאף ת"ס של $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא ס"ק .

זה גורר שלסדרה הנ"ל אין ת"ס מתכנסת!

■

משפט טיכונוף (1935) Tychonoff Theorem

נניח $X=\prod_{i\in I} X_i$ מכפלה טופולוגית. אזי X קומפקטי אם ורק אם כל X_i הוא מרחב קומפקטי.

הוכחה:

(כוון אחד)

אם X קומפקטי אז כל X_i היא גם קומפקטי כתמונה רציפה של X לגבי העתקת ההטלה: $p_i : X \to X_i$.

(כוון שני)

נוכיח בשתי דרכים:

דרך א. בעזרת קריטריון קומפקטיות Alexander (דרך תת בסיס).

דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות דרך FIP (תכונת החיתוך הסופי).

<u>קריטריון קומפקטיות Alexander</u> :

נניח X מרחב טופולוגי ו β תת בסיס (פרא-בסיס) של הטופולוגיה. אזי X קומפקטי אם ורק אם לכל כיסוי $C\subset\beta$ של X (דרך איברים של β) קיים תת כיסוי סופי.

<u>הוכחה של הקריטריון</u>: (**<u>נדלג</u>**)

כיוון אחד ברור (הגדרה של הקומפקטיות).

כיוון שני: נניח מ"ט X ותת בסיס שלו β מקיימים את התנאי של Alexander.

צ"ל ש X קומפקטי. נניח בשלילה שלא. אז קיים כיסוי פתוח C של X ללא תת כיסוי סופי.

נקרא לכיסוי פתוח "בעייתי" אם אין תת כיסוי סופי.

בה"כ ניתן להניח ש C הוא כיסוי בעייתי *מכסימלי*.

הערה: *מכסימליות* פירוש הדבר – אין גדול ממנו (ולא בהכרח הכי גדול) ז"א כל כיסוי פתוח של X המכיל את C ושונה ממנו הוא לא בעייתי.

<u>הסבר:</u> על מנת להוכיח הקיום של כיסוי כזה נשתמש בלמה של צורן.

שימו לב שאם נתון שרשרת של כיסויים בעייתים אזי האיחוד הוא גם בעייתי.

בגלל המכסימליות של C הוא מקיים את התכונה הבאה:

(*) אם O קבוצה פתוחה שלא שייכת ל C אז $C\cup\{O\}$ לא בעייתי ולכן קיים תת אוסף סופי C_0 של C כך ש $C_0\cup\{O\}$ מכסה את X.

האוסף $C\cap\beta$ הוא לא מכסה את X

(אחרת תנאי של Alexander גורר ש C לא בעייתי).

לכן קיימת נקודה $z\in X$ כך ש z לא מכוסה ע"י $C\cap\beta$.

קיים $U\in C$ כך ש $z\in U$ (כי C כיסוי).

לפי הגדרת תת בסיס ($\beta^{\cap F}$ הוא בסיס) קיימים מספר סופי של איברים

$S_1,\cdots,S_n\in\beta$ כך ש $z\in\bigcap_{i=1}^{n} S_i\subset U$.

אף $S_1,\cdots,S_n$ לא שייך ל C (כי אחרת $C\cap\beta$ מכסה את z).

לכן ע"פ תכונת (*) הנ"ל לכל $1\le i\le n$ קיים תת אוסף סופי C_i כך ש $C_i\cup\{S_i\}$ מכסה את X.

נסמן: $G_i:=\cup\{A: A\in C_i\}$. אז $S_i\cup G_i=X$ ונקבל

$$U\cup(\bigcup_{i=1}^{n}G_i)\supseteq(\bigcap_{i=1}^{n}S_i)\cup(\bigcup_{i=1}^{n}G_i)\supseteq\bigcap_{i=1}^{n}(S_i\cup G_i)=X$$

ז"א תת אוסף סופי $\bigcup_{i=1}^{n}C_i\cup\{U\}$ של C מכסה את X. סתירה ! זה מוכיח את הקריטריון.

<u>בעזרתו נוכיח כיוון שני של משפט</u> Tychonoff

בתפקיד של פרא-בסיס β ב $X=\prod_{i\in I}X_i$ ניקח **תיבות אלמנטריות**.

$\alpha:=\{\mathrm{p}_i^{-1}(O_i)\mid O_i\in\tau_i\}$ פרא-בסיס סטנדרטי. המקורות של קבוצות פתוחות מכל גורם X_i. נניח בשלילה ש X לא קומפקטי. אז לפי קריטריון Alexander קיים תת אוסף C של α כך ש C הוא **כיסוי בעייתי** (ללא תת כיסוי סופי) של X. נציג אותו $C=\bigcup_{i\in I}C_i$ כאשר כל C_i מורכב מתיבות אלמנטריות שבאות מגורם X_i. לפי ההנחה C_i לא מכיל תת כיסוי סופי של X. אזי $p_i(C_i)$ לא מכיל תת כיסוי סופי של X_i.

אבל X_i קומפקטי ו- $p_i(C_i)$ אוסף של קבוצות **פתוחות.** לכן $p_i(C_i)$ הוא לא כיסוי של X_i קיימת נקודה $x_i\in X_i$ שלא מכוסה ע"י $p_i(C_i)$. אזי הנקודה $x:=(x_i)\in\prod_{i\in I}X_i$ לא מכוסה ע"י (כיסוי) C של X. סתירה ! מכאן מש"ל.

☺

<u>**הערה:**</u>

דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות FIP (תכונת החיתוך הסופי)

דרך ג. ואולטרה-פילטרים (על-מסנן). *טופולוגיה קבוצתית,* האוניברסיטה הפתוחה (ד. לייבוביץ).

https://en.wikipedia.org/wiki/Tychonoff%27s_theorem

https://en.wikipedia.org/wiki/Compact_space

<u>תוצאות:</u>

- $[0,1]^S\in Comp$ קובית Tychonoff (לכל קבוצה S)
- $[0,1]^{\mathbb{N}}\in Comp$ קובית Hilbert
- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}=\{0,1\}\times\{0,1\}\times\cdots\in Comp$ קובית Cantor

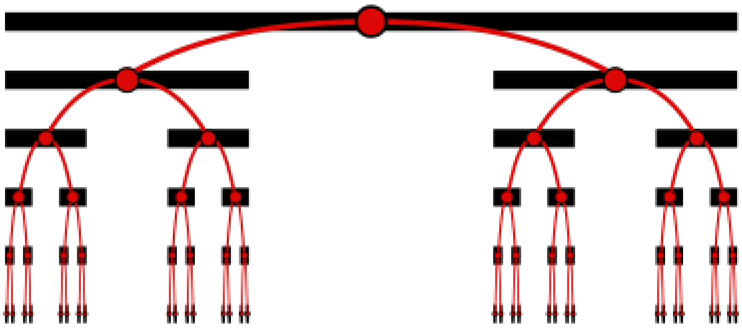
דוגמה (מרחב קנטור)

תזכורת: ידוע שקבוצת קנטור היא $C:=\{c\in[0,1]: c=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{3^i} \quad c_i\in\{0,2\}\}$.

$C_0=[0,1], C_n=\frac{1}{3}C_{n-1}\cup(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C_{n-1})$ $\quad C=\bigcap_n C_n$ חיתוך של קבוצות סגורות

משפט: קבוצת קנטור C הומיאומורפי עם מרחב מכפלה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}=\{0,1\}\times\{0,1\}\times\cdots$.

הוכחה: צ"ל $C\simeq\{0,2\}^{\mathbb{N}}$.



נגדיר פונקציה $f(x_1,x_2,\cdots)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i}$ $\quad f:\{0,2\}^{\mathbb{N}}\to C$.

אזי f חח"ע (יחידות ההצגה הנ"ל). f גם פונקציה על (ברור).

$\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ קומפקטי לפי משפט Tychonoff.

לכן בגלל משפט על ההומיאומורפיזם מ"ל f רציפה בכל נקודה $a=(a_1,a_2,\cdots)\in\{0,2\}^{\mathbb{N}}$

מ"ל לכל $\varepsilon>0$ קיימת סביבה $O\in N(a)$ כך ש

$$x\in O\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

נבחר $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש $\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{2}{3^i}<\varepsilon$ ונגדיר תיבה בסיסית

$$O:=\{a_1\}\times\{a_2\}\times\cdots\times\{a_{n_0}\}\times\{0,2\}\times\{0,2\}\times\cdots$$

אז ברור $O \in N(a)$ ולכל $x=(a_1,a_2,\cdots,a_{n_0},x_{n_0+1},x_{n_0+2},\cdots)\in O$ מתקיים:

$$|f(x)-f(a)|=|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}|=|\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}|\le\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{2}{3^i}<\varepsilon$$

■

<u>תרגיל</u>: הוכיחו ש:

א. $C^2\simeq C, C^n\simeq C, C^{\mathbb{N}}\simeq C^{\mathbb{Z}}\simeq C$.

ב. * C הומוגני.

<u>מידע</u> נוסף על קבוצת קנטור (Cantor set everywhere) :

- כל מרחב קומפקטי מטריזבילי הוא תמונה רציפה של קבוצת קנטור.
- למשל: $(x_i\in\{0,2\})$ $f(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{2}\cdot\frac{1}{2^i}$ $f:C\to[0,1]$ (מדוע היא לא חח"ע ?)
- כל מרחב מטרי קומפקטי מטריזבילי בעל מימד אפס ללא נקודות מבודדות הומיאומורפי עם קבוצת קנטור.
- מרחב קנטור $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ חשוב גם באינפורמטיקה, תורת הקודים, https://peerj.com/articles/cs-171.pdf
  במערכות דינמיות סמבוליות ...
  "shift homeomorphism $\sigma:\{0,1\}^{\mathbb{Z}}\to\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma(x_i)=(x_{i+1})$
  (תבדקו שיש מסלול צפוף לפעולת חבורה ציקלית $G=<\sigma>=\{\sigma^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ על $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$)
- ראו גם: https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set

הרצאה 12

<u>הגדרה:</u> נניח α,β כל אחד אוסף תתי קבוצות של קבוצה X. אומרים ש – ***β עידון של α*** אם מתקיים –
$\forall B\in\beta\ \exists A\in\alpha: B\subseteq A$

נסמן: $\beta\prec\alpha$.

<u>דוגמה טריוויאלית</u>: $\beta\subseteq\alpha$ אז $\beta\prec\alpha$.

<u>דוגמה</u>: $\forall 0<r_1<r_2\quad \{B_{r_1}(x):x\in X\}\succ\{B_{r_2}(x):x\in X\}$

הגדרה: נניח (X,d) מ"מ, α כיסוי פתוח של X. אומרים ש α הוא δ **-אחיד**

אם מתקיים $\{B_\delta(x)|x \in X\} \prec \alpha$

אומרים **כיסוי אחיד** *(uniform covering)* אם הוא δ-אחיד עבור $\delta > 0$ מסוים.

הגדרה: אומרים שהמספר $\delta > 0$ הוא **מספר לבג** $(Lebesgue)$ של כיסוי α אם כל תת קבוצה B ב X בעלת קוטר קטן מ δ מוכל באחד מהאיברים של α.

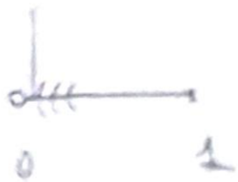
(ז"א $diam\, B < \delta \Rightarrow \{B\} \prec \alpha$).

הערות:

1) אם $0 < \delta$ מספר לבג של α, אז כל δ_1 כך ש - $0 < \delta_1 < \delta$ גם מספר לבג.

2) עבור $\alpha = \{B_\delta(x)|x \in X\}$, מספר לבג $= \delta$.

3) **דוגמה:** כיסוי פתוח ללא מספר Lebesgue.



$$X = (0,1] \notin Comp \qquad A_n := \left(\frac{1}{n}, 1\right]$$

$$\alpha := \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$$

כיסוי פתוח של $(0,1]$. אבל אין מספר לבג עבור α.

אם נניח בשלילה שכן אז קיים $\delta > 0$ מספר לבג ל $-\alpha$,

נגדיר $- \ A := B_{\frac{2\delta}{5}}(\frac{1}{5}\delta) = (0, \frac{3}{5}\delta)$

אז $diam(A) = \frac{3}{5}\delta < \delta$

אבל A <u>לא מוכל באף איבר של</u> α.

<u>משפט</u>: (מספר *Lebesgue*)

נניח (X,d) מרחב מטרי קומפקטי. אז לכל כיסוי פתוח α יש מספר לבג.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה שקים כיסוי פתוח α ללא מספר לבג.

אז לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת תת קבוצה A_n כך ש

$diam(A_n) < \frac{1}{n}$ אבל A_n **<u>לא מוכל באף איבר של</u>** α.

לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר נקודה אחת $a_n \in A_n$.

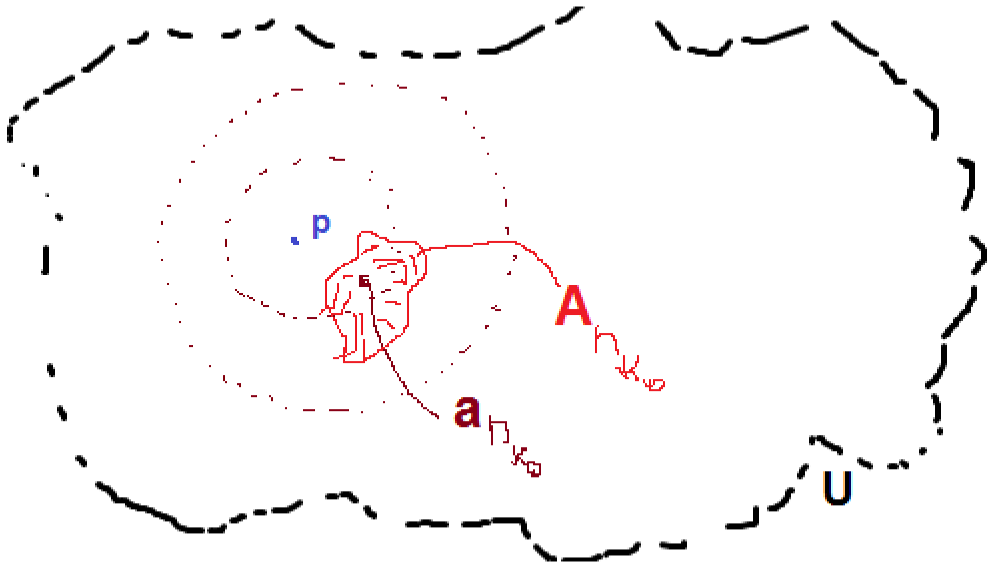
נתון ש X קומפקטי. הוא מטריזבילי לכן גם $X \in SComp$.

לכן קיימת תת סדרה מתכנסת $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ של הסדרה $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. תהי $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = p$.

α כיסוי. קיים $U\in\alpha$ כך ש $p\in U$ (כי α כיסוי)

קיים $\varepsilon>0$ כך ש $B_\varepsilon(p)\subseteq U$ (כי U פתוח)

קיים $k_0\in\mathbb{N}$ כך ש $diam(A_{n_{k_0}})<\frac{\varepsilon}{2}$ $d(p,a_{n_{k_0}})<\frac{\varepsilon}{2}$ (התכנסות והבניה)



$\forall x\in A_{n_{k_0}}$ $d(p,x)\le d(p,a_{n_{k_0}})+d(a_{n_{k_0}},x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$.

נקבל $A_{n_{k_0}}\subseteq B_\varepsilon(p)$. אז גם $A_{n_{k_0}}\subseteq B_\varepsilon(p)\subseteq U\in\alpha$, סתירה עם הבנייה של $A_{n_{k_0}}$!

☺

<u>תוצאה:</u> אם מרחב מטרי הוא קומפקטי אז כל כיסוי פתוח שלו אחיד.

<u>הסבר</u>: נניח α כיסוי פתוח. קיים מספר לבג $\delta>0$. אז $\{B_{\frac{\delta}{3}}(x):x\in X\}\prec\alpha$.

<u>משפט</u>: נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים $f:X\to Y$ פונקציה רציפה. אם X קומפקטי אז $f:X\to Y$ רציפה במידה שווה.

<u>הוכחה</u>: נניח $\varepsilon>0$. ש"ל שקיים $\delta>0$ כך שמתקיים :

$$d(x_1,x_2)<\delta\Rightarrow\rho(f(x_1),f(x_2))\le 2\varepsilon$$

נגדיר $\alpha:=\{f^{-1}(B_\varepsilon(y)):y\in Y\}$. אז α כיסוי פתוח של X (רציפות).

קיים מספר לבג $\delta>0$ עבור α (קומפקטיות של X ומשפט על מספר לבג).

נניח $d(x_1,x_2)<\delta$. אז $diam\{x_1,x_2\}<\delta$. לכן קיים $y\in Y$ כך ש

$$\{x_1,x_2\}\subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(y))$$

אז $\{f(x_1),f(x_2)\}\subseteq ff^{-1}(B_\varepsilon(y))\subseteq B_\varepsilon(y)$.

לכן $\rho(f(x_1),f(x_2))\le diam(B_\varepsilon(y))\le 2\varepsilon$.

☺

<u>תרגיל:</u> נניח (X,d) מ"מ קומפקטי. הוכיחו שקיימים $x,y\in X$ כך ש –

$$diam(X)=d(x,y)$$

<u>סקיצה:</u> $X\times X\in Comp$ ו $d:X\times X\to[0,\infty)$ רציפה (מדוע ?) ...

<u>הגדרה</u>: פונקציה $f:X\to Y$ נקראת **קומפקטיפיקציה** (compactification) של X אם f שיכון טופולוגי צפוף ומתקיים $Y\in Comp\cap T_2$.

<u>דוגמאות</u>:

$i:(-1,1)\to[-1,1]$ "(דו-נקודתית")

$f:\mathbb{R}^n\to B_1[0]\quad f(v)=\frac{v}{1+\|v\|}$

$f(n)=\frac{1}{n}\quad f:\mathbb{N}\to\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$ "(חד-נקודתית")

<u>תרגיל</u> * (יהיה בתירגול) -- **קומפקטיפיקציה חד-נקודתית** (Alexandroff)

נניח (X,τ) קומפקטי מקומית לא קומפקטי והאוסדורפי. תהי $p\notin X$ ("נקודת האינסוף"). בקבוצה $X^*=X\cup\{p\}$ נגדיר $\tau^*:=\tau\cup\{X^*\setminus K:\ K\ is\ compact\}$.

הוכיחו:

1. $(X^*,\tau^*)\in Comp\cap T_2$.
2. פונקצית ההכלה $i:X\to X^*$ מגדירה שיכון טופולוגי צפוף.

<u>דוגמאות</u>:

$X=\mathbb{R}^n$ אז $X^*\simeq S_n$ (הטלה סטראוגרפית)

$X=\mathbb{N}$ אז $X^*\simeq\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$

$X^* \simeq 8$ אז $X=(-\infty,1)\cup(5,7)$

<u>תרגיל</u>: לתאר קומפקטיפיקציה חד-נקודתית לכל מרחב דיסקרטי (אינסופי). נניח ל $(\mathbb{R},\tau_{discr})$

<u>משפט</u>: $LComp\cap T_2\subset T_{3.5}$

הוכחה: נניח $X\in LComp\cap T_2$. אם X קומפקטי אז הוא T_4 כי הוכחנו ש $Comp\cap T_2\subset T_4$. לכן גם $X\in T_{3.5}$. בה"כ $X\notin Comp$.

אז קיימת קומפקטיפיקציה $i:X\to X^*\in Comp\cap T_2$. ברור $X^*\in T_4$

(כי $Comp\cap T_2\subset T_4$). מצד שני $T_4\subset T_{3.5}$ (כי $T_4=T_4^{func}$ לפי משפט Urysohn. לכן $X^*\in T_{3.5}$. כעת נשתמש בעובדה ש $T_{3.5}$ תכונה תורשתית. לכן גם $X\in T_{3.5}$.

☺

<u>תזכורת</u>: $T_0,T_1,T_2,T_3,T_{3.5}$ תכונות תורשתיות.

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

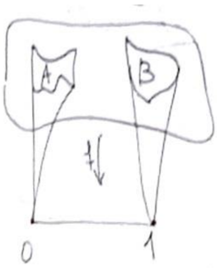
1. X קומפקטי מקומית והאוסדורפי.
2. קיימת קומפקטיפיקציה חד-נקודתית.

רמז: תת קבוצה פתוחה במרחב האוסדורפי קומפקטי (מקומית) מגדיר תת מרחב האוסדורפי קומפקטי מקומית.

<u>משפט:</u> $Metriz\subset T_4$.

<u>הוכחה:</u> $(X,\tau)\in Metriz\Rightarrow \exists d{:}\ \tau=top(d)$

<u>מ"ל:</u>



א. $X\in T_1$.
ב. לכל A,B סגורות יש הפרדה פונקציונלית (הפרדה פונקציונלית גוררת הפרדה סביבתית)

א) ברור $Metriz\subset T_2$.

ב)נגדיר $f{:}\,X\to[0,1]$ ע"י: $f(x)=\frac{f_A(x)}{f_A(x)+f_B(x)}$

כאשר – $f_A(x)=d(x,A)\,,f_B(x)=d(x,B)$

- $0\le f(x)\le 1$
- מוגדר היטב: המכנה $\neq 0$ לכל x כי – $f_A(x)\ge 0, f_B(x)\ge 0$
  לכן המכנה $=0$ אם ורק אם –

$$\begin{cases} f_A(x) = 0 \\ f_B(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} d(x, A) = 0 \\ d(x, B) = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \in \bar{A} \overset{\text{נתון סגור}}{=} A \\ x \in \bar{B} \underbrace{=}_{\text{נתון סגור}} B \end{cases}$$

לכן $x \in A \cap B$. מצד שני, $A \cap B = \emptyset$ (נתון). סתירה!

- נשים לב כי –

$$\frac{f_1}{f_2} = f \in C(X, [0,1])$$

f רציפה. זה קורה כי $f_1, f_2 \in C(X)$ וכן $f_2 \neq 0$ תמיד.

- $\forall a \in A: \quad f(a) = \frac{0}{-} = 0$.
- $\forall b \in B: \quad \frac{d(b,A)}{d(b,A)+0} = f(b) = 1$.

מצאנו הפרדה פונקציונלית!

☺

מידע: קיימים $X \in T_{3\frac{1}{2}}/T_4$, למשל $X := \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$.

Urysohn's Small Lemma (USL)

נניח $X \in T_4$ אז

(*) **לכל סביבה פתוחה O של קבוצה סגורה A קיימת סביבה פתוחה U של A כך ש** $A \subset U \subset \overline{U} \subset O$.

<u>הסבר</u>: $X \in T_4$ לכן עבור קבוצות סגורות זרות $A, B := X \setminus O$ קיימות סביבות פתוחות זרות $U \in N(A) \cap \tau, V \in N(B) \cap \tau$

אז נקבל $A \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus V \subset X \setminus B = O$.

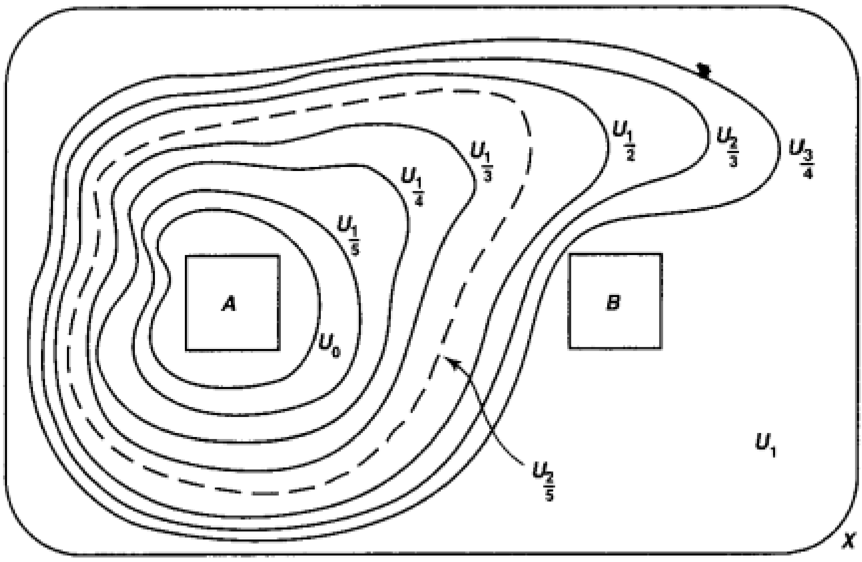
הערה: בעצם (*) שקול לתנאי ב של אקסיומת T_4

<u>משפט (למה של Urysohn):</u> $T_4 = T_4^{func}$.

נניח $X \in T_4$. אז לכל קבוצות סגורות זרות A, B יש הפרדה פונקציונלית במובן Urysohn (פונקציה רציפה $f(A)=0, f(B)=1 \quad f: X \to [0,1]$)

<u>הוכחה</u>**:** רעיון להוכחה – "Onion Argument"

בהנחה שיש פונקציה כזאת אז יש אוסף $\{U_t : t \in [0,1]\}$ סביבות פתוחות של A כך ש $0 < s < t < 1 \Rightarrow \overline{U_s} \subseteq U_t$ (ניקח למשל: $U_t := f^{-1}[0,t)$. שימו לב: $\overline{[0,s)} \subseteq [0,t)$)



בהוכחה הבאה עוברים תהליך הפוך – מבניית מאוסף דומה לבניית פונקציה.

תחילת התהליך: נגדיר $U_1 = X$. בגלל (USL) עבור $A \subset B^c$ קיימת קבוצה פתוחה $U_{\frac{1}{2}}$

כך ש $$A \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset X \setminus B$$

שוב בגלל (USL) קיימות קבוצות פתוחות $U_{\frac{1}{4}}, U_{\frac{3}{4}}$ כך ש

$$A \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset X \setminus B$$

בשלב הבא נמצא סביבות פתוחות עם אינדקסים $\frac{1}{8}, \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8} = 1$

כאשר סביבות עם האינדקסים $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{8}{8} = 1$ כבר הגדרנו !

נמשיך כך באינדוקציה. אז נקבל אוסף קבוצות פתוחות

$$\{U_t : t \in D\} \quad 0 < s < t < 1 \Rightarrow \overline{U_s} \subseteq U_t$$

שימו לב קבוצת רציונליים דיאדיים $D := \{\frac{m}{2^n}, m,n \in \mathbb{N}, m \le 2^n\}$ <u>**צפופה**</u> ב $[0,1]$.

נגדיר פונקציה $f(x):=\inf\{t\in D: x\in U_t\}$

- $0\le f(x)\le 1 \quad f(a)=0\ \forall a\in A \quad f(b)=1\ \forall b\in B$

כי $0\in\overline{D}=[0,1]$ $\quad A\subseteq U_t\subseteq X\setminus B\subseteq X=U_1 \quad \forall t\in D$.

- $f:X\to[0,1]$ רציפה (**נדלג על הבדיקה**)

לפי תכונת פרא-בסיס (ב $[0,1]$) מ"ל $f^{-1}[0,a),\ \ f^{-1}(a,1]$ פתוחות ב X.

א. לפי ההגדרה $f^{-1}[0,a)=\{x\in X: f(x)<a\}$.

קבוצה D צפופה ב $[0,1]$. לכן נקבל ש $f^{-1}[0,a)=\bigcup_{t<a}U_t$ והיא פתוחה לפי (t_3).

ב. ש"ל $X\setminus f^{-1}(a,1]$ סגור.

קודם נעיר $X\setminus f^{-1}(a,1]=\{x\in X: f(x)\le a\}$.

עכשיו מ"ל $\{x\in X: f(x)\le a\}=\bigcap_{a<t}\overline{U_t}$ (ואז חיתוך קבוצות סגורות שימוש ב $(t_3{}^c)$)

$(\subseteq)$

נניח $y\in\{x\in X: f(x)\le a\}$. נבחר דיאדי $s\in D$ כך ש $a<s<1$ (צפיפות D !)

אז לכל $a<t<s$ נקבל $\overline{U_t}\subseteq U_s$.

מצד שני בגלל $f(y)\le a<t$ מתקיים $y\in U_t\subseteq\overline{U_t}$. לכן $y\in\bigcap_{a<t}\overline{U_t}$.

$(\supseteq)$

נניח $y\in\bigcap_{a<t}\overline{U_t}$. נבחר ε כך ש $0<\varepsilon<1-a$.

בגלל הצפיפות של D נבחר:

$t\in D$ כך ש $a<t<a+\varepsilon<1$

וגם $s\in D$ כך ש $t<s<a+\varepsilon$.

ברור שאז $\overline{U_t}\subseteq U_s$. לכן $y\in U_s$. מכאן $f(y)\le s<a+\varepsilon$.

קיבלנו $f(y)<a+\varepsilon \quad \forall 0<\varepsilon<1-a$.

ז"א $f(y)\le a$.

☺

ראו גם: https://en.wikipedia.org/wiki/Urysohn%27s_lemma

הערה: (Tietze-Urysohn extension thm)

נניח $X\in T_1$. אז התנאים הבאים שקולים:

1. $X\in T_4$.

2. לכל תת קבוצה סגורה $A \subset X$ ולכל פונקציה רציפה $f : \mathrm{A} \to [0,1]$ קיימת הרחבה רציפה $\mathrm{F} : \mathrm{X} \to [0,1]$.

<u>נוכיח</u> רק $(1) \to (2)$:

נניח C, B קבוצות סגורות זרות לא ריקות. נגדיר קבוצה $\mathrm{A} := \mathrm{C} \cup B$. אז היא סגורה. ונגדיר פונקציה $\mathrm{f(A)} = 0, \mathrm{f(B)} = 1$ $f : \mathrm{A} \to [0,1]$. אז היא רציפה

(שימו לב: $\mathrm{A} := \mathrm{C} \cup B$ פירוק טופולוגי).

לפי (2) קיימת הרחבה רציפה $\mathrm{F} : \mathrm{X} \to [0,1]$.

אז לפי הבנייה היא מפרידה פונקציונלית C, B.

<u>תרגיל:</u> * (Square-filling curves)

בעזרת משפט ההרחבה הוכיחו שקיימת פונקציה רציפה <u>על</u> $\mathrm{F} : [0,1] \to [0,1]^2$.

<u>הסבר</u>:

קיים הומיאומורפיזם $h : C \to C^2$ וקיימת פונקציה רציפה ועל $\varphi : C \to [0,1]$

אז יש גם פונקציה רציפה ועל $\mathrm{f} = (\varphi \times \varphi) \circ \mathrm{h} : C \to [0,1] \times [0,1]$.

כעת נשתמש במשפט ההרחבה ונקבל פונקציה רציפה ועל $\mathrm{F} : [0,1] \to [0,1]^2$.

☺

<u>הגדרה</u>: נניח $\mathrm{S} = \{\mathrm{f}_i : \mathrm{X} \to Y_i\}_{i \in I}$ אוסף של פונקציות. אומרים ש S :

א. <u>מפריד נקודות</u> אם לכל $x_1 \neq x_2$ ב X קיים $\mathrm{f}_{i_0} : \mathrm{X} \to Y_{i_0}$ ב S כך ש $\mathrm{f}_{i_0}(x_1) \neq \mathrm{f}_{i_0}(x_2)$

ב. <u>מפריד נקודות וקבוצות סגורות</u> אם לכל $x \in X$ וקבוצה סגורה $x \notin C$ ב X

קיים $\mathrm{f}_{i_0} : \mathrm{X} \to Y_{i_0}$ ב S כך ש $\mathrm{f}_{i_0}(x) \neq \overline{\mathrm{f}_{i_0}(\mathrm{C})}$.

<u>משפט</u> (על פונקציית האלכסון):

1. נניח $\mathrm{S} = \{\mathrm{f}_i : \mathrm{X} \to Y_i\}_{i \in I}$ אוסף של פונקציות רציפות ונתבונן בפונקצית האלכסון

$$f = \Delta_{i \in I} f_i : \mathrm{X} \to Y = (\prod_{i \in I} Y_i, \tau_{\Pi}) \quad f(\mathrm{x}) = (f_i(\mathrm{x}))_{i \in I}.$$

א. אם S מפריד נקודות אז f רציפה חח"ע.

ב. אם S מפריד נקודות וקבוצות סגורות, $X \in T_1$ אז f שיכון טופולוגי.

הוכחה: א. לפי **משפט על האלכסון** f רציפה ומתקיים $f_i = p_i \circ f \quad \forall i \in I$.

לכן אם $\mathrm{f}_{i_0}(x_1) \neq \mathrm{f}_{i_0}(x_2)$ אז $f(\mathrm{x}_1) = (f_i(\mathrm{x}_1))_{i\in I} \neq f(\mathrm{x}_2) = (f_i(\mathrm{x}_2))_{i\in I}$.

ב. $X \in T_1$ לכן לפי שלב (א) האוסף S מפריד נקודות ופונקצית אלכסון היא חח"ע.

מ"ל שפונקציה (חח"ע+על+רציפה) "מצומצמת בטווח" $f : X \to f(X)$ סגורה.

מ"ל $f(C) = f(X) \cap \overline{f(C)}$ לכל C סגור ב X.

מ"ל $f(C) \supseteq f(X) \cap \overline{f(C)}$ (הכלה $\subseteq$ ברורה).

נניח $y \in f(X) \cap \overline{f(C)}$. צ"ל $y \in f(C)$.

נקבל $y = f(x) \in \overline{f(C)} \quad \exists x \in X$.

אז בגלל השוויונים $f_i = p_i \circ f \quad \forall i \in I$ רציפות ההטלות נקבל

$$\forall i \in I \quad f_i(x) = \mathrm{p}_i(f(x)) \in \mathrm{p}_i\, \overline{f(C)} \subset \overline{\mathrm{p}_i\, f(C)} = \overline{f_i(C)}$$

זאת אומרת S לא מפריד נקודה x וקבוצה סגורה C. אז בהכרח $x \in C$.

זה מוכיח $y = f(x) \in f(C)$.

☺

הרצאה 13

משפט: נניח X מ"ט. התנאים הבאים שקולים:

1. X קומפקטי והאוסדורפי (ז"א $X \in Comp \cap T_2$).
2. X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קובית Tychonoff $[0,1]^S$.

הוכחה: $2 \Leftarrow 1$

$[0,1]^S \in Comp$ (משפט Tychonoff). תת קבוצה סגורה גם קומפקטית. T_2 תכונה כפלית ותורשתית.
לכן $X \in Comp \cap T_2$.

$1 \Leftarrow 2$

נניח $X \in Comp \cap T_2$. מ"ל שקיים שיכון טופולוגי $\mathrm{f} : X \to [0,1]^S$ עבור S מסוים.

הוכחנו ש $Comp \cap T_2 \subset T_4$. נשתמש במשפט *Urysohn* $T_4 = T_4^{func}$.

לכל זוג של נקודות שונות $a,b \in X$ נבחר בפונקציה רציפה $f_{a,b} : X \to [0,1], \mathrm{f(a)} = 0, \mathrm{f(b)} = 1$.

אוסף של כל הפונקציות שנבחרו $\mathrm{S} := \{ f_s = f_{a,b} \mid a \neq b \}$ (ז"א $\mathrm{s} = (a,\mathrm{b}), a \neq b$)

משרה פונקצית האלכסון $f(x) = (f_s(x))_{s\in S}$ $f : X \to [0,1]^S$.

הפונקציה היא רציפה (הוכחנו ...) "מפרידה נקודות" ז"א היא חח"ע.

לפי **משפט השיכון** נקבל שהפונקציה היא מגדירה שיכון טופולוגי (על קבוצה סגורה).

☺

<u>משפט</u> *(האוניברסליות של קוביות* Tychonoff*)*

התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in T_{3.5}$
2. X משוכן לתוך קובית Tychonoff מסוימת $[0,1]^S$.

<u>הוכחה:</u>

$1 \Rightarrow 2$

$X \in T_{3.5}$ לכן קיים אוסף פונקציות $\{ f_s : X \to [0,1]\}_{s\in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות (למשל $C(X,[0,1])$). אז פונקצית האלכסון $f = \Delta_{s\in S} f_s : \mathrm{X} \to [0,1]^S$

שיכון טופולוגי לפי המשפט על פונקצית האלכסון.

$2 \Rightarrow 1$

לפי משפט על המכפלה (גם Tychonoff) $[0,1]^S \in Comp$. האוסדופיות תכונה כפלית.

לכן $[0,1]^S \in Comp \cap T_2$. עכשיו נזכיר ש $Comp \cap T_2 \subset T_4 \subset T_{3.5}$ ו $T_{3.5}$ תכונה תורשתית.

☺

<u>תוצאה חשובה</u>: $X \in T_{3.5}$ אם ורק אם ל X יש קומפקטיפיקציה.

<u>משפט</u> (מטריזציה)

התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in Metriz \cap B_2$ (שקול: $X \in Metriz \cap Sep$).
2. X משוכן לתוך קובית Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

<u>הוכחה:</u>

$2 \Leftarrow 1$

בגלל המשפט הקודם מ"ל שקיים אוסף בן מניה $\{f_s : X \to [0,1]\}_{s\in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות.

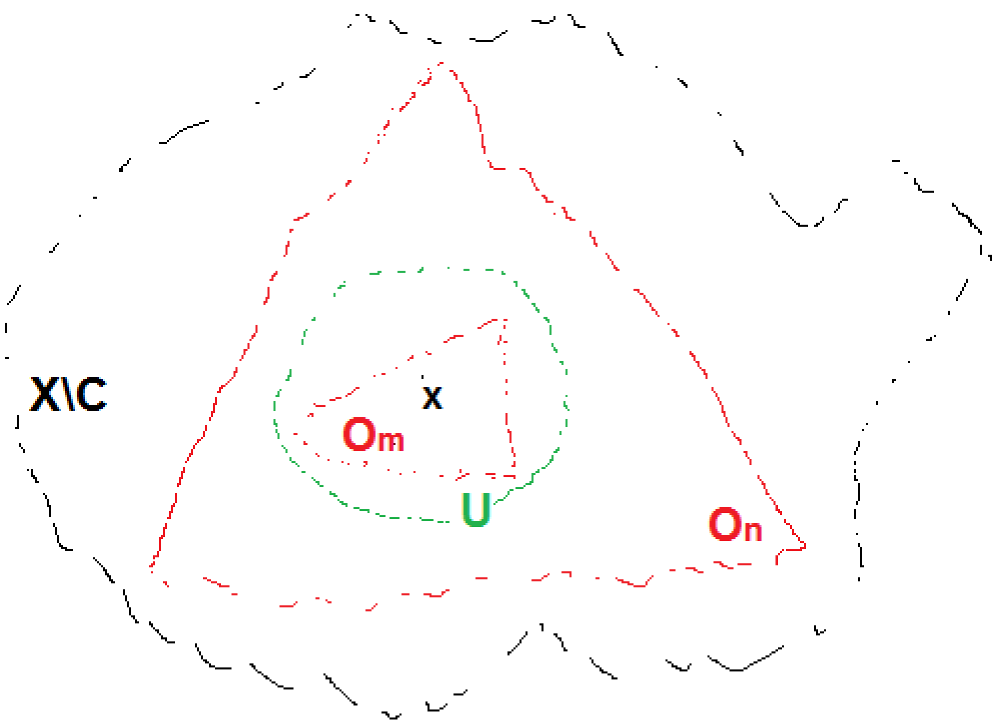
נתון $X \in Metriz \cap B_2$. קיים בסיס בן מניה $\gamma = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

לכל זוג O_n, O_m עם התנאי $\overline{O_m} \subseteq O_n$ נבחר פונקציה רציפה אחת $f_{m,n} : X \to [0,1]$ כך ש $f_{m,n}(\overline{O_m}) = 0,\ f_{m,n}(X \setminus O_n) = 1$ (זה אפשרי כי $Metriz \subseteq T_4 = T_4^{func}$)

אז אוסף S של פונקציות שנבחרו הוא בן מניה.

בגלל המשפט "פונקצית האלכסון" מ"ל ש S מפריד נקודות וקבוצות סגורות.

נניח $x \notin C$ ו C סגורה. $\gamma = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בסיס לטופולוגיה לכן אפשר לבחור סביבה פתוחה $O_n \in \gamma$ כך ש $x \in O_n \subset X \setminus C$.



במרחב מטריזבילי X קיימת סביבה $U \in N(x)$ כך ש $\overline{U} \subseteq O_n$

(למשל כדור $x \in U = B(x,\varepsilon) \subset \overline{B(x,\varepsilon)} \subset B[x,\varepsilon] \subset O_n$).

$\gamma = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בסיס לכן קיים $O_m \in \gamma$ כך ש $x \in O_m \subseteq U$. נקבל

$$x \in O_m \subseteq \overline{O_m} \subseteq \overline{U} \subseteq O_n \subseteq X \setminus C$$

אז פונקצית אוריסון $f_{m,n}:X\to[0,1]$ מפרידה x,C (כי היא מפרידה $\overline{O_m}, X\setminus O_n$)

$2 \Rightarrow 1$

$[0,1]^{\mathbb{N}} \in Metriz \cap B_2$ וכך גם כל תת מרחב שלו (כי $Metriz, B_2$ תכונות תורשתיות).

☺

<u>מידע</u>:

א. אפשר להוכיח (משפט Urysohn) $T_3 \cap B_2 \subset Metriz$

(ראו למשל ספר מצויין: J.R. Munkres, Topology).

לכן במשפט הקודם התנאי הראשון ניתן להחליש ל $X \in T_3 \cap B_2$.

ב. $[0,1]^{\mathbb{N}}$ משוכן לתוך מרחב הילברט l_2 (מצדיק את השם: קובית הילברט) ע"י

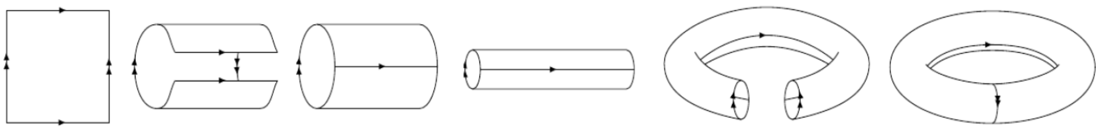
$$\varphi:[0,1]^{\mathbb{N}} \to l_2 \quad (a_1,a_2,a_3,\cdots)\mapsto(a_1,\tfrac{1}{2}a_2,\tfrac{1}{3}a_3,\cdots)$$

טופולוגית מנה -- Quotient topology

למדנו מספר אפשרויות לבנות מרחבים טופולוגיים חדשים בעזרת נתונים. בין היתר:

תת מרחב, מכפלה, סכום. אפשרות נוספת וגם מאוד חשובה היא "מנה טופולוגית".

למשל אפשר לקבל טורוס 2-ממדי כמרחב מנה של ריבוע באופן הבא:



This image from http://i.stack.imgur.com/FJaFe.png.

נניח (X,τ) מ"ט ואנחנו רוצים "להדביק חלקים מסוימים".

איך מגדירים טופולוגיה מתאימה ? מה הן ההגדרות המתאימות ?

<u>תזכורת</u> (מתורת הקבוצות) נניח $\sim$ יחס שקילות במרחב (X,τ). נסמן:

- $[a]:=\{x\in X \mid a\sim x\}$ מחלקה של איבר a

(תמיד $a\in[a]$ ויש חלוקה $X=\coprod_{a\in X}[a]$)

- $X/\sim=\{[a]:a\in X\}$ "קבוצת המנה" היא קבוצת המחלקות
- $\rho:X\to X/\sim \quad a\mapsto[a]$ "פונקציה (העתקת) טבעית" (תמיד **על**)

שאלה: איך להגדיר "טופולוגיה טבעית" ב $X/\sim$ כאשר X מ"ט ?

שקול: נתונה פונקציה על $q:X\to Y$. איך להגדיר "טופולוגיה טבעית" ב Y ?

שימו לב: אם נגדיר $a\sim b\Leftrightarrow q(a)=q(b)$ אז נקבל יחס שקילות כך ש

Y וקבוצת מנה $X/\sim$ הם באותו תפקיד.

רעיון: להגדיר טופולוגיה σ ב Y כטופולוגיה הכי חזקה שמבטיחה רציפות $q:X\to Y$.

הגדרה: נניח (X,τ) מ"ט ונתונה פונקציה על $q:X\to Y$. אומרים ש σ **טופולוגית המנה** (ביחס לפונקציה $q:(X,\tau)\to Y$) אם מתקיימים שני תנאים הבאים:

א. $q:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ רציפה.

ב. אם $q:(X,\tau)\to(Y,\lambda)$ רציפה אז $\lambda\subseteq\sigma$.

במצב כזה גם אומרים ש $q:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ היא **פונקצית מנה** (או **העתקת מנה**).

לעיתים σ נקראת גם "טופולוגיה חזקה" (strong topology).

תאור של טופולוגית המנה: $\sigma:=\{O\subseteq Y \mid \quad q^{-1}(O)\in\tau\}$

ז"א קבוצה ב Y פתוחה אם (ורק אם) המקור פתוח ב X.

שקול: קבוצה ב Y סגורה אם (ורק אם) המקור סגור ב X (מדוע ?)

תרגיל: כל הומיאומורפיזם פונקצית מנה.

תרגיל: הרכבה של פונקציות מנה היא גם מנה.

משפט (טופולוגיה חזקה)

נניח $q : X \to Y$ פונקצית מנה ונתונה פונקציה $f : Y \to Z$.

אז פונקציה f רציפה אם (ורק אם) רציפה ההרכבה $f \circ q : X \to Z$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f\circ q"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

הוכחה: נניח $f \circ q : X \to Z$ רציפה. צ"ל $f : Y \to Z$ רציפה.

ש"ל $f^{-1}(O)$ פתוחה ב Y לכל O פתוחה ב Z.

נתון ש $q : X \to Y$ מנה. לכן ש"ל $q^{-1}(f^{-1}(O))$ פתוחה ב X. אבל

$q^{-1}(f^{-1}(O)) = (f \circ q)^{-1}(O)$ ונתונה רציפות של $f \circ q : X \to Z$.

☺

תוצאה: נניח $q : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ פונקצית מנה. אז טופולוגית מנה σ ב Y היא טופולוגיה הכי חזקה שמבטיחה רציפות $q : X \to Y$.

ז"א אם $q : (X, \tau) \to (Y, \gamma)$ רציפה אז $\gamma \subseteq \sigma$.

הסבר: נשתמש במשפט "טופולוגיה חזקה" כאשר בתפקיד $f : Y \to Z$ ניקח $id : (Y, \sigma) \to (Y, \gamma)$.

משפט: (תנאי מספיק: פתיחות, סגירות)

אם פונקציה $q : X \to Y$ על, רציפה, פתוחה (או וסגורה)

אז $q : X \to Y$ היא פונקצית מנה.

הוכחה: נניח $q^{-1}(O)$ **פתוחה** ב X עבור $O \subseteq Y$. צ"ל O פתוחה ב Y.

לפי הנתון הפונקציה היא פתוחה לכן התמונה $q(q^{-1}(O))$ היא גם פתוחה.

אבל q **על** לכן $q(q^{-1}(O)) = O$ חייבת להיות פתוחה.

☺

תוצאה: כל הטלה $p_{i_0} : \prod_{i \in I} X_i \to X_{i_0}$ היא פונקצית מנה.

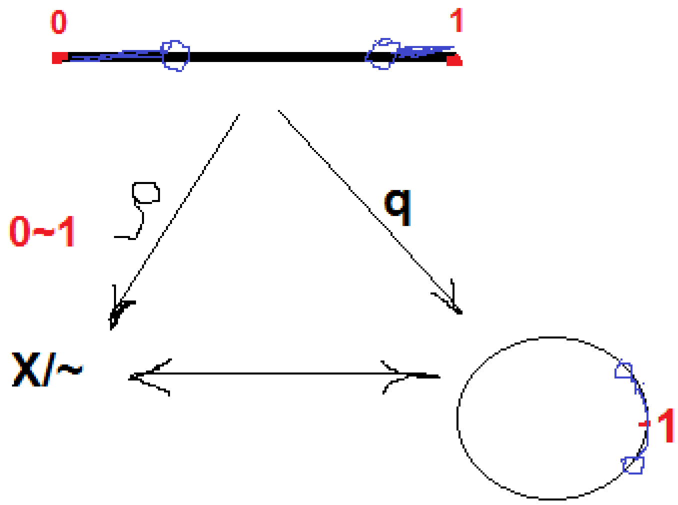
תוצאה: נניח $f : X \to Y$ רציפה, על $X \in Comp, Y \in T_2$. אז f פונקצית מנה.

דוגמה: $f(x) = cis(2\pi x)$ $\quad f : X = [0,1] \to Y = T = \{z \in \mathbb{C} \mid \| z \| = 1\}$

היא פונקצית מנה (הפונקציה היא על רציפה **וסגורה**).

הערה: כאן אפשר לתת גם הסבר גיאומטרי: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

$$X \to X/\sim \;\cong Y, \quad 0 \sim 1$$



דוגמה: $id : (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \to \mathbb{R}$ רציפה על אבל **לא פונקצית מנה**.

הסבר: המקור $id^{-1}(\{5\}) = \{5\}$ פתוח ב $(\mathbb{R}, \tau_{discr})$ אבל לא ב $\mathbb{R}$.

דוגמה: פונקציה רציפה $id : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ פונקצית מנה אם ורק אם $\tau_1 = \tau_2$.

דוגמה: $h(x) = cis(2\pi x)$ $\quad h : X = [0,1) \to Y = T = \{z \in \mathbb{C} \mid \| z \| = 1\}$

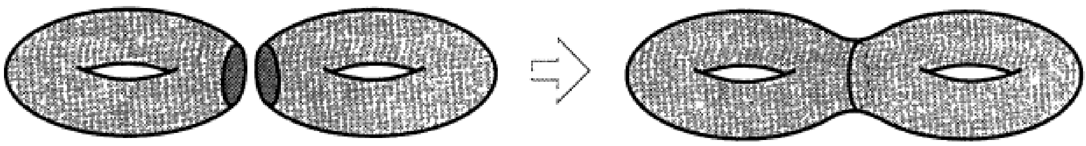
הפונקציה היא על ורציפה אבל היא לא פונקצית מנה.

הסבר: עבור $A := \{z \in T \mid 0 \le \arg(z) < \frac{\pi}{2}\}$ המקור $h^{-1}(A) = [0, \frac{1}{4})$ פתוח ב $[0,1)$

אבל A לא פתוח ב T.

הרצאה 14

טופולוגית מנה (המשך)



תזכורת:

__הגדרה__: נניח (X,τ) מ"ט ונתונה פונקציה על Y $\mathrm{q}:X\to Y$

(למשל $\mathrm{q}:X\to X/\sim$ פונקציה שמושרית מיחס שקילות).

אומרים ש σ **טופולוגית המנה** אם מתקיימים שני תנאים הבאים:

א. $\mathrm{q}:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ רציפה.

ב. אם $\mathrm{q}:(X,\tau)\to(Y,\lambda)$ רציפה אז $\lambda\subseteq\sigma$.

במצב כזה גם אומרים ש $\mathrm{q}:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ היא **פונקצית מנה** (או **העתקת מנה**).

לעיתים σ נקראת גם "טופולוגיה חזקה" (strong topology).

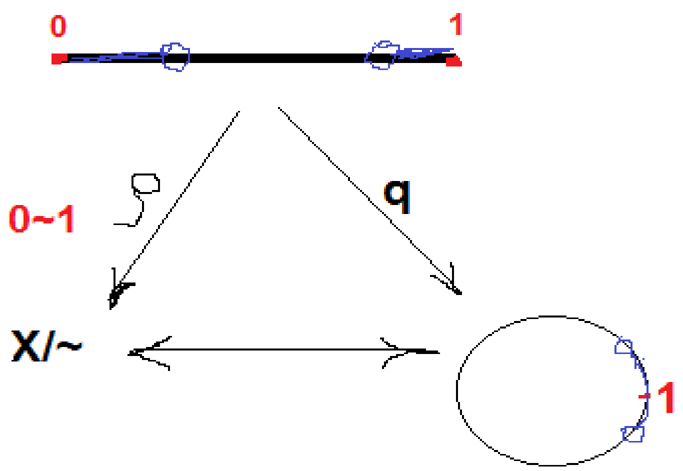
__תאור של טופולוגית המנה__: $\sigma:=\{O\subseteq Y\mid \quad q^{-1}(O)\in\tau\}$

דוגמה: $\mathrm{f(x)}=\mathrm{cis}(2\pi\,\mathrm{x})\quad f:X=[0,1]\to Y=T=\{z\in\mathbb{C}\mid \|z\|=1\}$

היא פונקצית מנה (הפונקציה היא על רציפה **וסגורה**).

הערה: אפשר לתת גם הסבר גיאומטרי: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

$$X\to X/\sim\,\cong Y,\quad 0\sim1$$



דוגמה: $\mathrm{id}:(\mathbb{R},\tau_{discr})\to\mathbb{R}$ רציפה על אבל **לא פונקצית מנה**.

הסבר: המקור $\mathrm{id}^{-1}(\{5\})=\{5\}$ פתוח ב $(\mathbb{R},\tau_{discr})$ אבל לא ב $\mathbb{R}$.

דוגמה: פונקציה רציפה $\mathrm{id}:(\mathrm{X},\tau_1)\to(\mathrm{X},\tau_2)$ פונקצית מנה אם ורק אם $\tau_1=\tau_2$.

דוגמה: $h(\mathrm{x})=\mathrm{cis}(2\pi\,\mathrm{x})\quad \mathrm{h}:X=[0,1)\to Y=T=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\|\,\mathrm{z}\,\|=1\}$

הפונקציה היא על ורציפה אבל היא לא פונקצית מנה.

הסבר: עבור $\mathrm{A}:=\{\mathrm{z}\in\mathrm{T}\,|\,0\le\arg(z)<\frac{\pi}{2}\}$ המקור $\mathrm{h}^{-1}(\mathrm{A})=[0,\frac{1}{4})$ פתוח ב $[0,1)$

אבל A לא פתוח ב T.

אזהרות:

1. להיות פונקצית מנה – לא תורשתית. ז"א יתכן ש $\mathrm{f}:X\to Y$ העתקת מנה $\mathrm{A}\subseteq X$. ופונקצית על שמושרית $f(\mathrm{A})$ $\mathrm{f}_A:\mathrm{A}\to f(\mathrm{A})$ היא לא תמיד מנה.

למשל להתבונן בדוגמאות שהיו עם $A=[0,1)\subset X=[0,1]$.

דוגמה נוספת: $p_1:X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,xy=1\}\cup\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ לא מנה

(כי המקור של $\{0\}$ הוא נקודון $\{(0,0)\}$ שהיא נקודה מבודדת ב X

אבל $\{0\}$ לא פתוח ב $\mathbb{R}$).

2. מרחב מנה יכול להיות מאוד מסובך ("הרבה יותר מהמקור"). למשל:

א. ריבוע דו-ממדי הוא מרחב מנה של קטע (Square-filling curves).

ב. כל מרחב מטרי קומפקטי הוא מרחב מנה של קבוצת קנטור.

3. פונקצית מנה יכולה להיות לא פתוחה ולא סגורה.

דוגמה: עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 1\le x\end{cases}\quad \mathrm{f}:\mathbb{R}\to\{0,1\},$

טופולוגית מנה על $Y=\{0,1\}$ היא טופולוגית סרפינסקי $\sigma=\{\varnothing,\{0\},\{0,1\}\}$.

$\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ לא פתוחה ולא סגורה (דוגמה נוספת בהמשך).

בנוסף שימו לב שמרחב מנה (שהוא מרחב סרפינסקי) לא T_1.

4. בהעתקות מנה אקסיומות הפרדה לא תמיד נשמרות.

הערה: מרחב מנה הוא בעל תכונת T_1 אם"ם כל מחלקת שקילות היא סגורה.

דוגמה: ב $\mathbb{R}$ נגדיר יחס שקילות $a\sim b \Leftrightarrow a-b\in\mathbb{Q}$. אז מרחב מנה $\mathbb{R}/\sim$

הוא בעל טופולוגיה טריוויאלית (מה העוצמה של $\mathbb{R}/\sim$?)

הסבר: מחלקות שקילות הן מהצורה $[a]=a+\mathbb{Q}$. צפוף ולא סגור ב $\mathbb{R}$.

לכל מקור $q^{-1}(\mathrm{C})$ של תתקבוצה לא ריקה C ב $\mathbb{R}/\sim$ לגבי פונקציה טבעית $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\sim$

הקבוצה $q^{-1}(\mathrm{C})$ היא גם צפופה ב $\mathbb{R}$ (כי $q^{-1}(\mathrm{C})$ מכיל לפחות מחלקה אחת).

לכן האפשרות היחידה ש $q^{-1}(\mathrm{C})$ סגור היא $q^{-1}(\mathrm{C})$. אבל אז

$\mathbb{R}/\sim\ = \mathrm{q}(\mathbb{R}) = qq^{-1}(\mathrm{C}) = C$ (קחו בחשבון ש $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\sim$ על).

לכן ב $\mathbb{R}/\sim$ עם טופולוגית מנה σ יש רק קבוצה אחד סגורה לא ריקה (שהיא $\mathbb{R}/\sim$).

שקול: σ טופולוגיה טריוויאלית.

משפט: (**הומיאומורפיזם ומנה**)

נניח $\mathrm{f}:X\to Y$ פונקציה רציפה, על + חח"ע. אז f מנה אם ורק אם f הומיאומורפיזם.

הוכחה: כיוון אחד ברור (כי כל הומיאומורפיזם פונקצית מנה).

בכיוון השני נניח $\mathrm{f}:X\to Y$ מנה וחח"ע. צ"ל f הומיאומורפיזם. מ"ל f פתוח.

לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq X$ מתקיים תמיד $U\subseteq f^{-1}(f(U))$. אצלנו בעצם

$U=f^{-1}(f(U))$ (בגלל f חח"ע).

לפי הגדרת טופולוגית מנה קבוצה $O:=f(U)$ היא חייבת להיות פתוחה ב Y.

הוכחנו ש f פתוח.

☺

משפט (תנאי מספיק "צמצום")

נניח $\mathrm{f}_1:X\to Y$ $\mathrm{f}_2:\mathrm{Y}\to Z$ פונקציות רציפות.

אם ההרכבה $\mathrm{f}=\mathrm{f}_2\circ\mathrm{f}_1:\mathrm{X}\to Z$ היא פונקצית מנה אז גם $\mathrm{f}_2:\mathrm{Y}\to Z$ פונקצית מנה.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "f_2\circ f_1"'] & Y \arrow[d, "f_2"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

הוכחה: צ"ל $f_2 : Y \to Z$ מנה. נניח $f_2^{-1}(A)$ פתוח ב Y. לפי הרציפות של $f_1 : X \to Y$ נקבל ש $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A))$ פתוח ב X. ברור $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A)) = (f_2 \circ f_1)^{-1}(A)$. אבל נתון ש $f = f_2 \circ f_1 : X \to Z$

פונקצית מנה. לכן A פתוחה.

☺

תוצאה: נניח $f : Y \to Z$ רציפה על וקיימת תת קבוצה $X \subseteq Y$ כך שצמצום $f_X : X \to Z$ הוא על ופונקצית מנה. אז גם $f : Y \to Z$ מנה.

הסבר: נפעיל משפט " הכללת קריטריון מנה" באופן הבא

כאשר $i : X \to Y$ שיכון טבעי

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f_X"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

☺

הגדרה: נניח $f : X \to Y$ ונתון יחס שקילות $\sim$ ב X (או נתונה חלוקה של X).

אומרים שפונקציה $f : X \to Y$

א. **מכבדת** את היחס $\sim$ אם $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$.

ב. **מגדירה** את היחס $\sim$ אם $a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

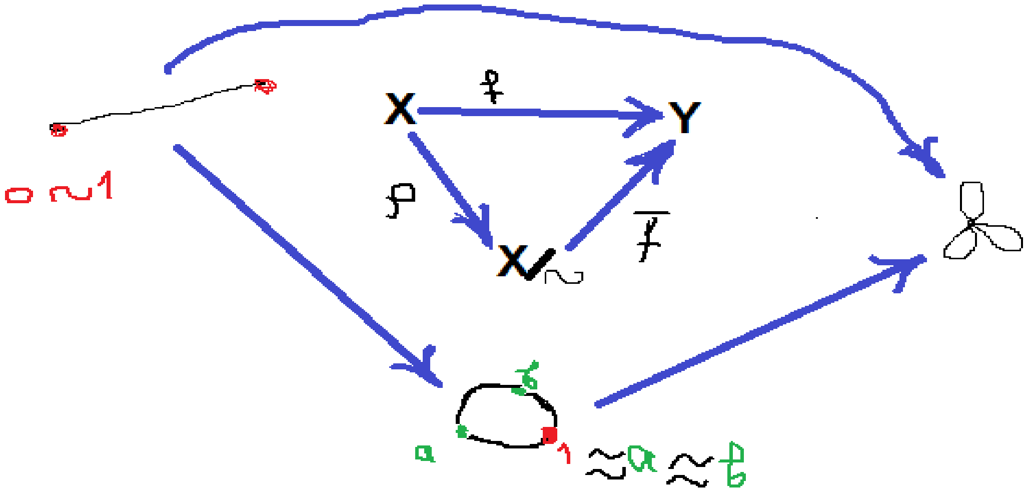
תכונות:

1. $f : X \to Y$ **מכבדת** את היחס $\sim$ אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על הבאה

$\overline{f}([x]) = \overline{f}(\rho(x)) = f(x)$ $\quad \overline{f} : X/\sim \to Y$ $\quad$ (ז"א $f = \overline{f} \circ \rho$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & Y \\ & X/\sim \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

הערה: פירוש אינטואיטיבי -- יתכן ו $f : X \to Y$ מדביקה יותר נקודות מיחס שקילות $\sim$ למשל



מוסכמה: בהמשך על $X/\sim$ ניקח טופולוגית מנה (אם לא נאמר אחרת).

2. $f : X \to Y$ רציפה אם ורק אם $\bar{f} : X/\sim \to Y$ רציפה.

הסבר: נפעיל משפט "טופולוגיה חזקה" עבור הדיאגרמה הבאה

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & X/\sim \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

אם $f : X \to Y$ רציפה אז גם $\bar{f} : X/\sim \to Y$.

3. $f : X \to Y$ מנה אם ורק אם $\bar{f} : X/\sim \to Y$ מנה

הסבר: נפעיל משפט "צמצום" עבור הדיאגרמה הבאה

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & X/\sim \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

אם $\mathrm{f}:X\to Y$ מנה אז גם $\overline{f}:X/\sim\ \to Y$.

4. $\mathrm{f}:X\to Y$ **מגדירה** את היחס $\sim$ אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על $\overline{f}:X/\sim\ \to Y$ והיא חח"ע.

משפט (קריטריון למנה)

נניח $\mathrm{f}:X\to Y$ פונקציה רציפה על. נסמן ב $X/\sim_f$ מרחב מנה כאשר $\sim_f$ הוא היחס שמוגדר ע"י $\mathrm{f}:X\to Y$ (ז"א $a\sim_f b\Leftrightarrow f(a)=f(b)$).

התנאים הבאים שקולים:

א. $\mathrm{f}:X\to Y$ מנה.

ב. פונקציה מושרית $\overline{f}:X/\sim_f\ \to Y$ היא הומיאומורפיזם

הוכחה:

ב $\Leftarrow$ א

ברור כי $\mathrm{f}=\overline{\mathrm{f}}\circ\rho$ הרכבה של שתי פונקציות מנה. כי $\rho:X\to X/\sim_f$ פונקצית מנה (כי בחרנו $X/\sim_f$ בטופולוגית מנה) ו $\overline{f}$ הומיאומורפיזם.

א $\Leftarrow$ ב

נתון $\mathrm{f}:X\to Y$ מנה. לפי תכונה 3 נקבל $\overline{f}:X/\sim_f\ \to Y$ גם מנה. אבל $\overline{f}:X/\sim_f\ \to Y$ (על ו) חח"ע לפי תכונה 4.

לכן לפי משפט "**הומיאומורפיזם ומנה**" נקבל ש $\overline{f}:X/\sim_f\ \to Y$ הומיאומורפיזם.

☺

הערה חשובה: תכונות הנ"ל עוזרות להוכיח הומיואומופיזם עם מרחבי מנה מסוימים.

דוגמה: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

הסבר: נגדיר פונקציה

$$f:X=[0,1]\to Y=T=\{z\in\mathbb{C}\mid \|z\|=1\}\quad \mathrm{f(x)}=(\cos(2\pi\mathrm{x}),\sin(2\pi\mathrm{x}))$$

הפונקציה היא מנה (כפונקציה רציפה סגורה על מרחב האוסדורף).

$\mathrm{f}:X\to T$ מגדירה את היחס $0\sim 1$.

לפי משפט קריטריון קיים הומיאומורפיזם $\overline{f}:[0,1]/\sim_f \ \to T$.

לכן $[0,1]/\sim_f \ \cong T$.

תרגיל: הוכיחו:

א. $f:\mathbb{R}\to T,\ f(\mathrm{x})=\mathrm{cis}(2\pi\,\mathrm{x})$ פונקצית מנה.

ב. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong T$

(כאשר $\mathbb{R}/\mathbb{Z}=\{x+\mathbb{Z}\mid x\in\mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגית מנה)

הסבר של א

(דרך 1) אפשר להשתמש בתוצאת משפט צמצום עבור ההכלה $\mathrm{i}:[0,1]\to\mathbb{R}$.

(דרך 2) אפשר להוכיח שבעצם $f:\mathbb{R}\to T,\ f(\mathrm{x})=\mathrm{cis}(2\pi\,\mathrm{x})$ פתוחה.

הסבר של ב

כאן אפשר להשתמש בחלק א יחד עם משפט קריטריון למנ אם ניקח בחשבון שיחס שקילות

$\sim_f$ כאן בדיוק נותן יחס הבא $a\sim_f b\Leftrightarrow a-b\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a\equiv b \bmod \mathbb{Z}$.

הערה: מחלקת שקילות של $a\in\mathbb{R}$ הוא $[a]=a+\mathbb{Z}$. ז"א תאור אחר של היחס הוא $a\sim_f a+n \quad \forall n\in\mathbb{Z}$

תרגיל: * במעגל יחידה $T=\{z\in\mathbb{C}:\|z\|=1\}$ במישור המרוכב נגדיר יחס שקילות $v\sim -v$.
הוכיחו שמרחב מנה $T/\sim$ הוא הומיאומורפי למעגל עצמו T.

פתרון: $\mathrm{f}:\mathrm{T}\to\mathrm{T},\mathrm{f}(\mathrm{v})=\mathrm{v}^2$ היא פונקצית מנה (מדוע ?). היא מגדירה יחס שקילות בדיוק $v\sim -v$.

מידע: כאן בעצם אנחנו מחשבים "מרחב המסלולים" (אורביטות) לגבי פעולה טבעית
חבורה ציקלית $\mathbb{Z}_2=\{\mathrm{e},\sigma\}$ עם שני איברים על המעגל T (הפעולה היא היפוך הסימן)

$$\mathbb{Z}_2\times T\to T \quad (\sigma,v)\mapsto\sigma(v)=-v$$

תרגיל: הוכיחו שאם ב $\mathbb{R}$ לכוץ קטע $[0,1]$ לנקודה 0 אז מרחב מנה הומיאומורפי ל $\mathbb{R}$.

פתרון: נגדיר את הפונקציה

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \mathrm{f(x)}=\begin{cases} x & x\le 0 \\ 0 & 0\le x\le 1 \\ x-1 & 1\le x \end{cases}$$

הפונקציה היא רציפה על "ומדביקה" את כל הנקודות של קטע $[0,1]$. על מנת להוכיח שהפונקציה היא מנה מ"ל שהיא סגורה נתבונן ב 3 פונקציות צמצום שהן רציפות:

$$\mathrm{f}_1:(-\infty,0]\to(-\infty,0],\ \mathrm{f}_2:[0,1]\to\{0\},\ \mathrm{f}_3:[1,\infty)\to[0,\infty)$$

שמגדירות את הפונקציה באופן טבעי.

הפונקציות גם סגורות (שני הומיאומורפיזמים ואחד קבוע).

התמונות הן סגורות ב $\mathbb{R}$. לכן גם ההרכבות

$$\mathrm{f}_1:(-\infty,0]\to\mathbb{R},\ \mathrm{f}_2:[0,1]\to\mathbb{R},\ \mathrm{f}_3:[1,\infty)\to\mathbb{R}$$

פונקציות סגורות.

לכל תת קבוצה סגורה $A\subseteq\mathbb{R}$ נציג אותה כאיחוד

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3\quad A_1=A\cap(-\infty,0],\ A_2=A\cap[0,1],\ A_3=A\cap[1,\infty)$$

של 3 תת קבוצות סגורות ב $\mathbb{R}$. התמונה $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)$ סגורה ב $\mathbb{R}$ כאיחוד סופי של קבוצות סגורות.

יריעות מסוימות כמנה של ריבוע

הגדרה: **יריעה** בעלת מימד n היא מרחב האוסדורף ,שמקיים את אקסיומת המנייה השנייה ,בעל התכונה שלכל נקודה במרחב יש סביבה שהומיאומורפית לחצי-מרחב

$$H:=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,0\le x_n\}$$

אם במקום H אפשר לקחת $\mathbb{R}^n$ אז אומרים **יריעה ללא שפה**.

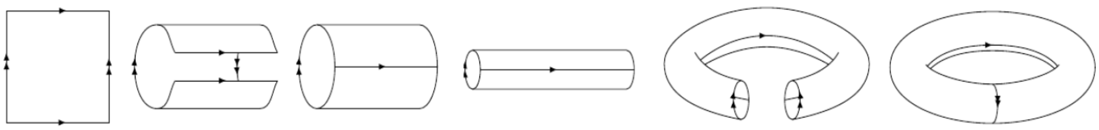
למשל: כל קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^n$ יריעה בעל מימד n, מעגל, טורוס ... יריעה ללא שפה.

כדור סגור ב $\mathbb{R}^n$ יריעה בעל מימד n עם שפה. ריבוע יריעה בעל מימד 2 עם שפה.

נראה כמה דוגמאות של יריעות 2-ממדיות שמתקבלות כמנה של ריבוע.

- טורוס דו-ממדי T^2 2-dimensional torus

אפשר לקבל אותו כמנה של גליל (שלב ביניים)



This image from http://i.stack.imgur.com/FJaFe.png.

תרגיל: הוכיחו $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$

($\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \{(x,y)+\mathbb{Z}^2 \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגית מנה)

פתרון: נתחיל מהפונקציה $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = (cis2\pi x, cis2\pi y)$ $f:\mathbb{R}^2 \to T^2$.

צמצום הפונקציה $f:[0,1]^2 \to T^2$ פונקצית מנה. לכן לפי **משפט** (תנאי מספיק "צמצום") גם $f:\mathbb{R}^2 \to T^2$ מנה.

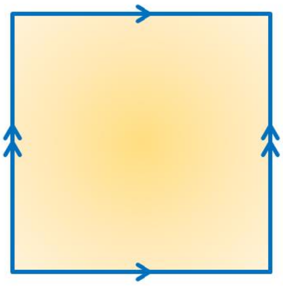
כעת לפי **משפט** (קריטריון למנה) נקבל $\mathbb{R}^2/\sim_f \cong T^2$.

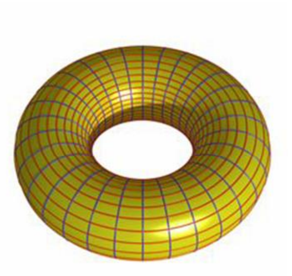
כאן יחס שקילות מתאימה היא $\forall n,m \in \mathbb{Z}$ $(a,b) \sim_f (a+n, b+m)$ המחלקות

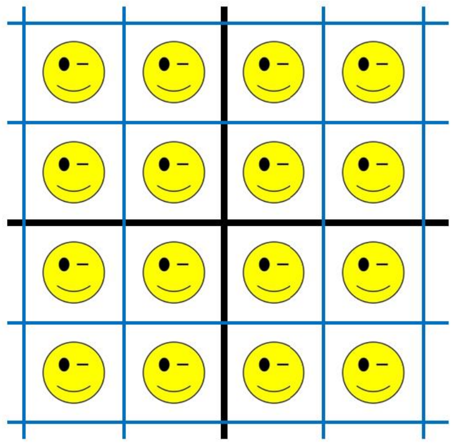
הן $\{(x,y)+\mathbb{Z}^2 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. לכן קבוצת מנה מתאימה היא בדיוק $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

לכן מרחב מנה $\mathbb{R}^2/\sim_f$ כאן הוא בעצם $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$.

כבר הוכחנו הומאומורפיזם $\mathbb{R}^2/\sim_f \cong T^2$. לכן גם $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$.

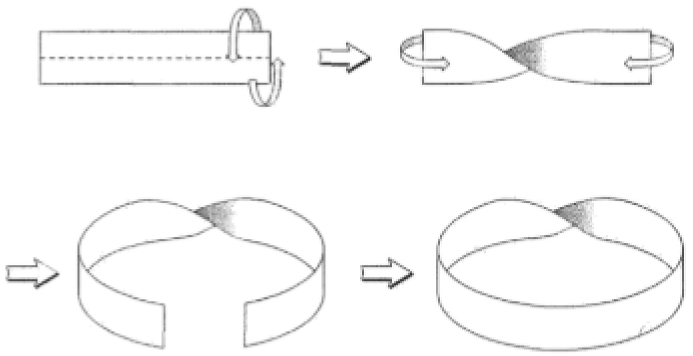




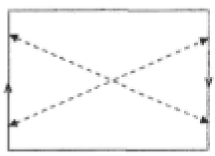


מידע: מי שלמד תורת החבורות בהחלט מבין שקבוצת מנה $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ היא חבורת מנה. בשפה יותר מתמטית כאן מדובר על איזומורפיזם של חבורות טופולוגיות $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \cong T^2$

- Mobius strip טבעת מוביוס

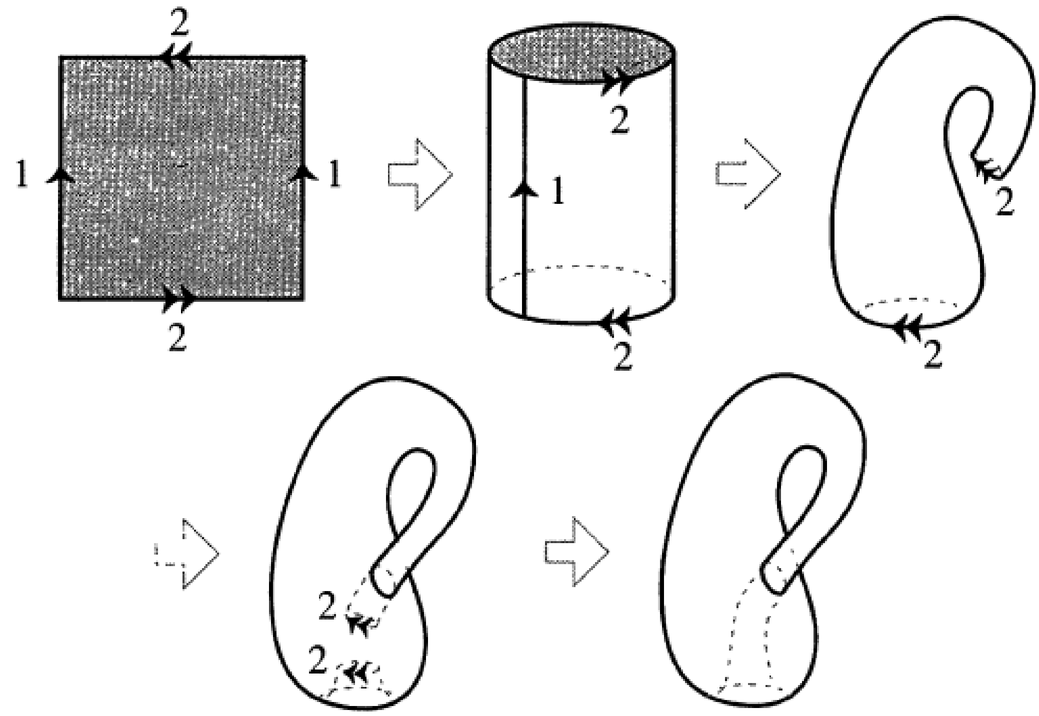


. הוא 2-ממדי. ללא אוריאנטציה. אפשר לקבל אותו גם כך $\mathbb{R}^3$ משוכן לתוך



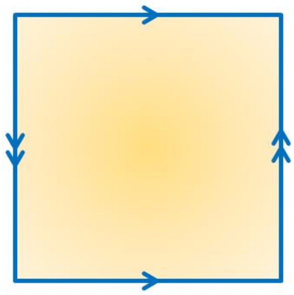
• בקבוק קליין Klein bottle

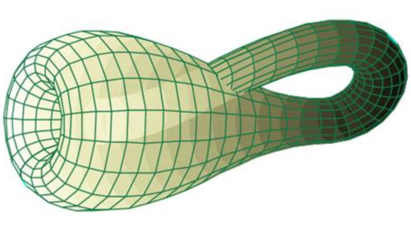
אפשר לקבל אותו כמנה של ריבוע

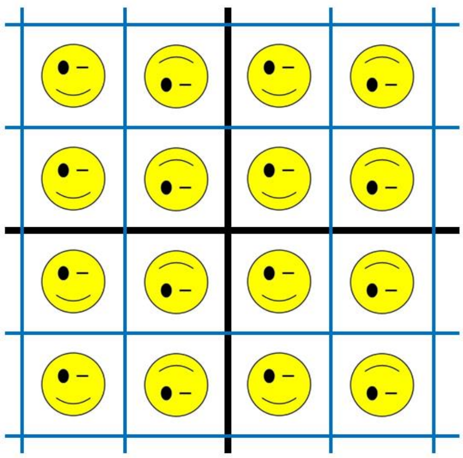


לא ניתן לשכן לתוך $\mathbb{R}^3$.

אפשר לקבל אותו דרך הדבקת שפות של שתי טבעות מוביוס.



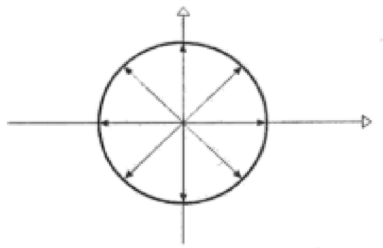




- מרחב פרוייקטיבי Projective space

P^n = מרחב קווים ישרים ב $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ שעוברים דרך 0.

$q:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to P^n$ פונקצית מנה



צמצום של הפונקציה הנ"ל $q_S:S^n\to P^n$ על ספירה יחידה n-ממדית מוכיח שאכן q מנה

בגלל תוצאה של ה **משפט:** תנאי מספיק "צמצום"

כאן יחס שקילות שמתקבל על S^n הוא $v\sim -v$ (antipodal points)

מקרה פרטי $q:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to P^1$ **Projective line**

טענה: P^1 הומיאומורפי למעגל S^1.

הסבר: שקול לדבר על מישור $\mathbb{R}^2$ כמרחב מספרים מרוכבים $\mathbb{C}$. ובמקום S^1 על T.

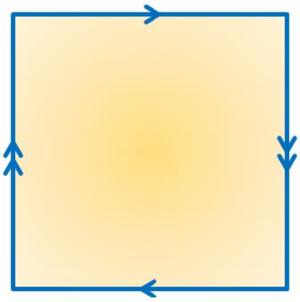
נגדיר (תרגיל שהיה) $\mathrm{f}:\mathrm{T}\to\mathrm{T},\mathrm{f}(\mathrm{v})=\mathrm{v}^2$ היא פונקצית מנה (פונקציה רציפה ועל מקומפקטי להאוסדופי). היא מגדירה יחס שקילות בדיוק $v\sim -v$.

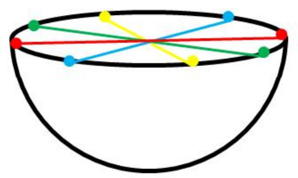
מישור פרוייקטיבי Projective plane

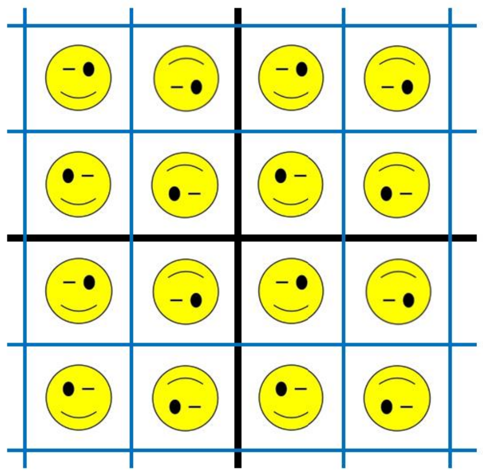
P^2 = מרחב קווים ישרים (מנוקבים) ב $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ שעוברים דרך 0.

אפשר לקבל דרך $q_S:\mathrm{S}^2\to P^2$

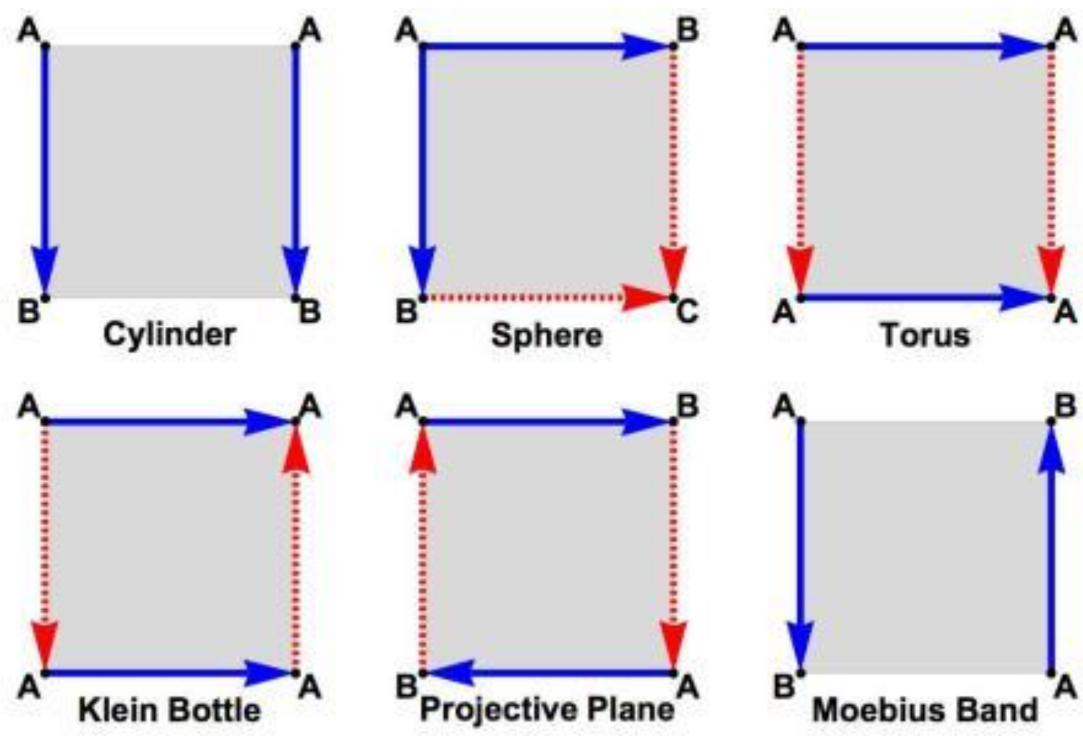
אפשרויות נוספות: כמנה של ריבוע, כמנה של חצי-ספירה, כמנה של מישור







סיכום: מנות מסוימות של ריבוע



תרגילים נוספים:

תרגיל: בספירה $S_2 := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\|=1\}$ נגדיר יחס שקילות ע"י

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

לתאר מרחב מנה $S_2/\sim$.

תרגיל: ב $\mathbb{R}$ נגדיר יחס שקילות ע"י

$$x \sim -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

מה הוא מרחב מנה $\mathbb{R}/\sim$?

תרגיל: ב $\mathbb{R}$ נגדיר יחס שקילות ע"י

$$x \sim y \Leftrightarrow \sin x = \sin y$$

מה הוא מרחב מנה $\mathbb{R}/\sim$?

תרגיל: * מרחב מנה $S\times[0,1]/\sim$ של גליל $S\times[0,1]$ כשמכוצים את כל הנקודות של בסיס $S\times\{0\}$ לנקודה אחת הומיאומורפי לדיסק סגור דו-מימדי

רמז: פונקציה $f(x,t) = tx$ $\quad f : S\times[0,1] \to D$.

תרגיל: הוכיחו שכל רטרקציה רציפה היא מנה.

הגדרה: נניח Y תת מרחב טופולוגי של X . פונקציה $f : X \to Y$ נקראת "רטרקציה" retraction אם היא רציפה **על** כך ש $f(y) = y \quad \forall y \in Y$

(שקול: f רציפה על ומתקיים $f \circ f = f$)

תרגיל:* נניח $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad x \geq 0 \vee y = 0\}$ (תת מרחב של $\mathbb{R}^2$).

נגדיר פונקציה $f(x, y) = x$ $\quad f : X \to \mathbb{R}$ (צמצום של הטלה).

הוכיחו ש f פונקצית מנה אבל f לא סגורה ולא פתוחה.

ספר מומלץ נוסף:

C. Adams and R. Franzosa, **Introduction to Topology: Pure and Applied, 2008**
מלבד חומר מעניין על טופולוגיה אפשר למצוא בספר זה גם תאור ידידותי מאוד של אישומים של טופולוגיה בתחומים שונים: כלכלה, תורת המשחקים, פיזיקה וכולי.

תרגילים (מסוימים ששאלנו בהרצאות)

תרגיל: "בעזרת פונקציה רציפה" הוכיחו שבמ"מ (X,d):

א) כל קבוצה סגורה היא G_δ.

ב) כל קבוצה פתוחה היא F_σ

פתרון: א. לכל קבוצה סגורה A במ"מ (X,d) יש פונקציה רציפה

$$f_A : \mathrm{X} \to [0,\infty) \quad f_A(x) = d(x,A)$$

כך ש $f_A^{-1}(0) = A$. כעת נגדיר $O_n := f^{-1}[0,\frac{1}{n})$. אז $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$.

ב. נובע מחלק א (משלים וכללי de Morgan)

☺

תרגיל: הוכיחו שמרחב $(\mathbb{Z},d_p)$ (עם מטריקה p –אדית) הוא לא קשיר לחלוטין.

פתרון: $(\mathbb{Z},d_p)$ האוסדורפי. מ"ל שהוא בעל מימד 0. כדורים פתוחים מרכיבים בסיס בכל מ"מ.

מ"ל כל כדור של $(\mathbb{Z},d_p)$ הוא קבוצה סגוחה.

במרחב מטרי $(\mathbb{Z},d_p)$ כל המרחקים החיובים הם מהצורה $\frac{1}{p^m}$ $(m\in\{0,1,\cdots\})$. לכן

מתקיים שוויון $\forall\ \frac{1}{p^m} < r \le \frac{1}{p^{m-1}} \quad B_r(\mathrm{u}) = B_{\frac{1}{p^m}}[\mathrm{u}]$

כל כדור פתוח במרחב זה הוא בעצם גם כדור סגור.

☺

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שכל הכדורים (פתוחים וסגורים) ב $(\mathbb{Z},d_p)$ הם הומיאומורפיים.

פתרון: קודם כל טענת עזר: $\mathrm{f}_a(\mathrm{x}) = a\,\mathrm{x} \quad (\mathbb{Z}, d_p) \to (\mathbb{Z}, d_p)$ רציפה לכל $a \in \mathbb{Z}$.

הפונקציה היא גם חח"ע לכל $0 \neq a \in \mathbb{Z}$.

רציפות נובעת מ $\mathrm{d}_p(a\,\mathrm{x}, a\,\mathrm{y}) \le \mathrm{d}_p(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

(זה נכון כי $p^k \mid (ax - ay) \;\Rightarrow\; p^k \mid (x - y)$)

נגדיר פונקציה $\mathrm{f}_{\mathrm{p}^m}(\mathrm{x}) = \mathrm{p}^m\mathrm{x} \quad \mathrm{f}_{\mathrm{p}^m} : (\mathbb{Z}, d_p) \to (\mathbb{Z}, d_p)$. אז היא חח"ע ורציפה. התמונה היא כדור סגור הבא $\mathrm{f}(\mathbb{Z}) = p^m\mathbb{Z} = \mathrm{B}_{\frac{1}{p^m}}[0]$. פונקציה הפכית $x \mapsto \frac{x}{p^m} \quad \mathrm{f}_{p^m}{}^{-1} : \mathrm{B}_{\frac{1}{p^m}}[0] \to \mathbb{Z}$ מוגדרת היטב וגם רציפה

(הפעם שימו לב $\mathrm{d}_p(\tfrac{1}{p^m}\mathrm{x}, \tfrac{1}{p^m}\mathrm{y}) \le p^m \cdot \mathrm{d}_p(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \quad \forall\,\mathrm{x}, \mathrm{y} \in p^m\mathbb{Z}$).

נזכיר ש $\mathbb{Z} = B_1[0]$. לכן בשלב זה אפשר לסכם שכל כדורים הסגורים עם מרכז ב 0 הם הומיאומורפיים (ל $(\mathbb{Z}, d_p)$).

כעת מספיק להוכיח שהזזות $\mathrm{T}_u(x) = u + x \quad \mathrm{T}_u : (\mathbb{Z}, d_p) \to (\mathbb{Z}, d_p)$

הן איזומטריות (ולכן גם הומיאומורפיזמים) ומתקיים $\mathrm{T}_u(B_r[0]) = B_r[\mathrm{u}]$.

☺

תרגיל: א. למיין קטעים שהם יותר מנקודון ב $\mathbb{R}$ עד כדי הומיאומורפיזמים.

ב. מתי קיימת פונקציה רציפה <u>**ועל**</u> בין הקטעים הנ"ל ?

פתרון: א. יש שלוש מחלקות קטעים עד כדי הומיאומורפיזמים:

$$(\mathrm{A}) \qquad \mathbb{R} \simeq (a,b) \simeq (a,\infty) \simeq (-\infty,b)$$

$$(\mathrm{B}) \qquad [a,b) \simeq (c,d] \simeq [a,\infty) \simeq (-\infty,b]$$

$$(\mathrm{C}) \qquad [a,b]$$

ב. בגלל חלק א מספיק לבדוק רק 3 נציגים של המחלקות הנ"ל מחלק א

באופן סמלי התשובה היא: $(A) \rightleftarrows (\mathrm{B}) \to (C)$

יחסית קל למצוא פונקציות רציפות על $(A) \to (\mathrm{B}) \to (C)$.

למשל: $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 2^x & x \le 0 \\ 1 & 0 \le x \end{cases} \quad \mathbb{R} \to (0,1] \qquad (A) \to (\mathrm{B})$

$$(B)\to(C) \qquad (-\infty,1]\to[0,1] \quad f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x & 0\le x\end{cases}$$

מקרה של $(B)\to(A)$ הוא הרבה פחות קל. אפשר למשל לבחור פונקציה הבאה

$$f:(0,1]\to\mathbb{R} \quad f(x)=\tfrac{1}{x}\sin(\tfrac{1}{x})$$

☺

<u>תרגיל</u>: כמה מסלולים קיימים בפעולה של $Homeo(x)$ על X אם:

א) $X=8$

ב) $X=(0,1)\cup(2,4)\cup\{7\}$

תשובה:

א) 2 מסלולים. אחד חד-איברי $\{a\}=[a]$ (נקודת ההשקה של שני מעגלים).

קחו בחשבון שסימטריה לגבי נקודת a מגדיר הומיאומורפיזם ....

ב) 2 מסלולים. אחד חד-איברי $\{7\}=[7]$ (נקודת מבודדת <u>יחידה</u> במרחב).

קיים הומיאומורפיזם $h:(0,1)\to(2,4)$ מגדיר הומיאומורפיזם

$f:X\to X,\quad f(x)=h(x)\ \forall x\in(0,1), f(x)=h^{-1}(x)\ \forall x\in(2,4), f(7)=7$.

קחו בחשבון $(0,1),\ (2,4)$ מרחבים הומוגניים (כל אחד הומאומורפי ל $\mathbb{R}$).

☺

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שכל חבורה טופולוגית $(G,\tau,\cdot)$ היא הומוגנית.

פתרון: לכל $a\in G$ מוגדרת הזזה $T_a(x)=ax \quad T_a:G\to G$. היא רציפה כי

אפשר להציג אותה כהרכבה של שתי פונקציות רציפות (שיכון ומכפלה)

$$G\to G\times G\to G \quad x\mapsto(a,x)\mapsto ax$$

כל הזזה חח"ע ועל. ההופכי של $T_a:G\to G$ הוא $T_{a^{-1}}:G\to G$. שהוא גם רציף. לכן כל הזזה בעצם הומיאומורפיזם.

לכל שתי נקודות $x,y\in G$ מתקיים $T_a(x)=y$ עבור $a=yx^{-1}$.

☺

תרגיל: נניח $X = \bar{Y}$ (ז"א Y צפופה ב X –). אם $Y \in Conn$ אז גם $X \in Conn$.

פתרון: נניח בשלילה ש X לא קשיר. אז יש פירוק טופולוגי

$$X = X_1 \cup X_2 \quad X_1 \cap X_2 = \varnothing \quad X_1 \neq \varnothing \quad X_2 \neq \varnothing \quad X_1, X_2 \in \tau$$

נתון ש Y צפופה ב X. לכן Y פוגש כל תת רבוצה פתוחה לא ריקה ב X. בין היתר

$Y \cap X_1 \neq \varnothing, \quad Y \cap X_2 \neq \varnothing$. אז נקבל פירוק טופולוגי של Y

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \quad Y_1 \cap Y_2 = \varnothing \quad Y_1 \neq \varnothing \quad Y_2 \neq \varnothing \quad Y_1, Y_2 \in \tau_Y$$

סתירה לנתון $Y \in Conn$.

☺

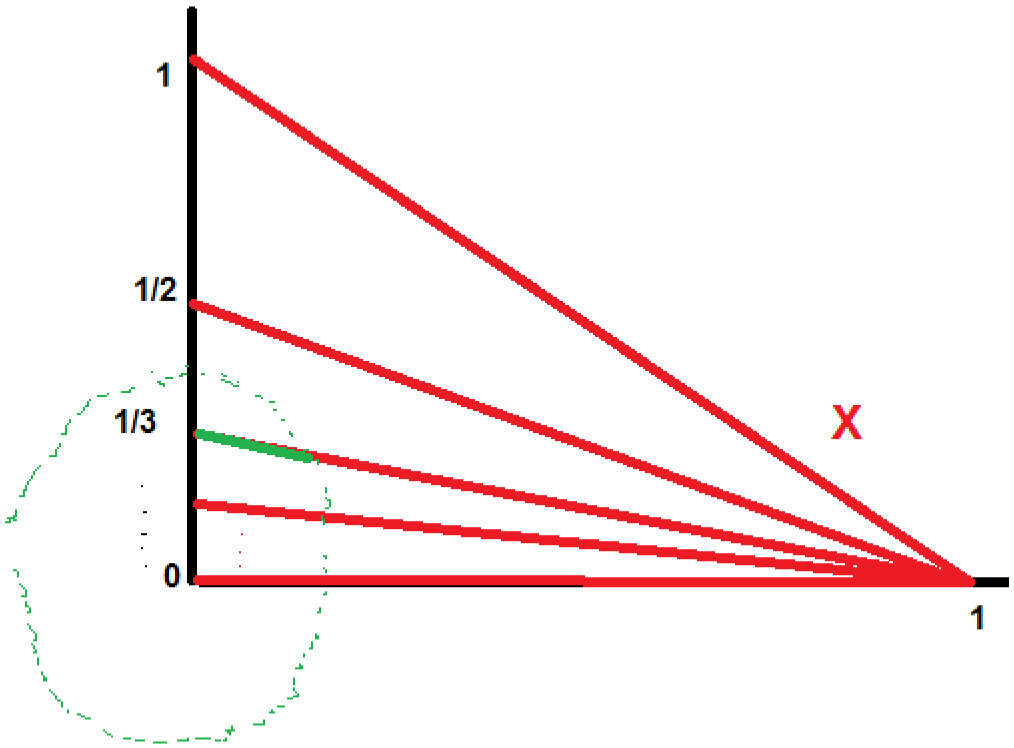
תרגיל:

א. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה).

ב. תנו דוגמה של תת מרחב ב $\mathbb{R}^2$ שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

פתרון: א. שימוש במשפט: כל מרחב נורמי הומיאומורפי לכדור פתוח שלו.

ב. פרטים בקובץ http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TopEx20.pdf



☺

תרגיל: נניח (X,d) מ"מ קומפקטי. הוכיחו שקיימים $a,b\in X$ כך ש –

$$diam(X)=d(a,b)$$

פתרון: $X\times X\in Comp$ (מכפלה שומרת על קומפקטיות)

ו $d:X\times X\to[0,\infty)$ רציפה כי היא פונקצית ליפשיץ כי

$$|d(x_1,x_2)-d(y_1,y_2)|\le d(x_1,y_1)+d(x_2,y_2)$$

קחו בחשבון ש $d(x_1,y_1)+d(x_2,y_2)$ מגדירה מטריקה מתאימה לטופולוגיה של $X\times X$.

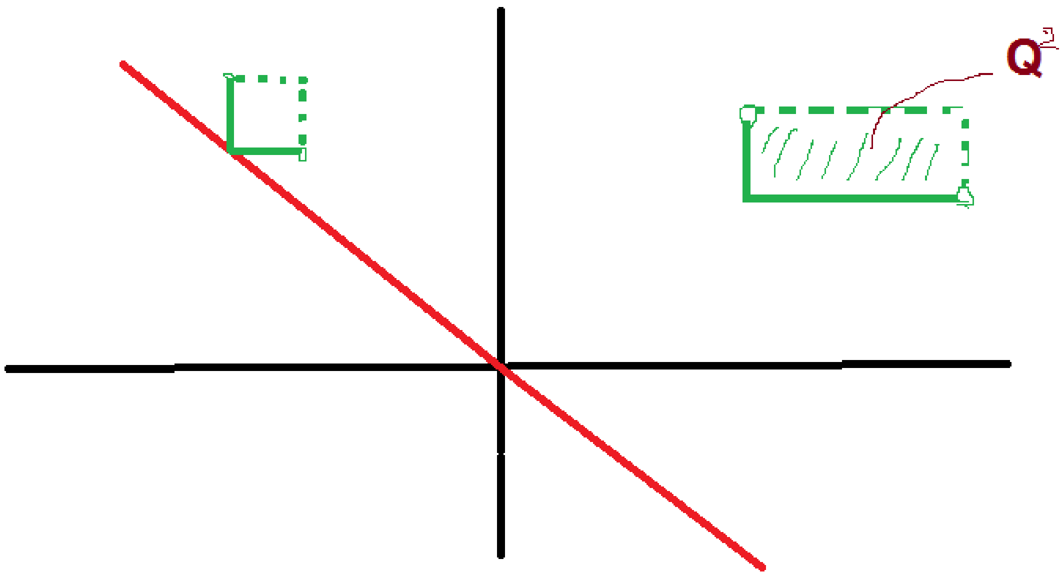
כעת לפי משפט Weierstrass מתקבל המקסימום

$$\mathrm{diam}(X)=\sup\{d(x,y):x,y\in X\}=\sup d=\max\{d(x,y):x,y\in X\}$$

☺

תרגיל: "מישור סורגנפראי" $(\mathbb{R},\tau_s)^2\in Sep$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי.

פתרון: $\{[a,a+\varepsilon)\times[b,b+\delta):a,b\in\mathbb{R},\varepsilon>0,\delta>0\}$ בסיס למישור סורגנפראי.



מישור סורגנפראי $(\mathbb{R},\tau_s)^2$ כן ספרבילי, $\mathbb{Q}^2$ צפוף בו.

הסיבה היא שכל אלמנט של בסיס פוגש את $\mathbb{Q}^2$

$[a,a+\varepsilon)\times[b,b+\delta)\cap\mathbb{Q}^2\supset(a,a+\varepsilon)\times(b,b+\delta)\cap\mathbb{Q}^2\ne\varnothing$.

נגדיר תת מרחב שלו $X:=\{(x,-x)|\quad x\in\mathbb{R}\}\subset(\mathbb{R},\tau_s)^2$

אז כל נקודה שלו מבודדת ב X כי

$$[x,x+1)\times[-x,-x+1)\cap X=\{(x,-x)\}$$

לכן X דיסקרטי. כל תת קבוצה בה היא סגורה. לכן צפופה בו רק X עצמו. העוצמה היא עוצמת הממשיים. המסקנה $X\notin Sep$.

☺

תרגיל: א. לתאר קומפקטיפיקציה חד-נקודתית לכל מרחב דיסקרטי (אינסופי).

ב. לתת תאור גיאומטרי במקרה של $(\mathbb{N},\tau_{discr})$.

פתרון:

א. נניח נתון $(\mathrm{X},\tau_{discr})$ עם X אינסופי. אז

$X^*=X\cup\{p\}$ נגדיר $\tau^*:=\tau_{discr}\cup\{X^*\setminus K:\ K\ is\ \ finite\}$.

שקול להגדיר כך: $\tau^*:=\{\mathrm{O}\subseteq X^*\ |\quad \mathrm{p}\in\mathrm{O}\Rightarrow X^*\setminus O\ is\ \ finite\}$.

ב. במקרה של $\mathrm{X}=(\mathbb{N},\tau_{discr})$ נקבל X^* הומאומורפי למרחב $\mathrm{Y}:=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$.

על מנת להוכיח קודם כל נבחר בפונקציה חח"ע ועל $\mathrm{f}:\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}\to\mathrm{X}$ ואז נגדיר

$$\mathrm{h}:\mathrm{Y}=\{0\}\cup\{\tfrac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}\to X^*=X\cup\{p\}\quad h(0)=\mathrm{p},\mathrm{h}(\tfrac{1}{n})=f(\tfrac{1}{n})$$

הפונקציה היא חח"ע על ורציפה. לכן גם הומאומורפיזם כי $Y\in Comp, X^*\in T_2$.

הרציפות: נניח $O\in\tau^*$. יש שני מקרים בלבד:

א. $p\notin O$

ב. $p\in O$

במקרה א נקבל $0\notin h^{-1}(O)$. וברור ש $h^{-1}(O)$ פתוחה ב $\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$.

במקרה ב $X^*\setminus O$ סופי ו $0\in h^{-1}(O)$. במקרה זה $h^{-1}(O)$ משלים של תת קבוצה סופית ב $\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$. אבל תת קבוצה סופית סגורה בכל מ"מ.

לכן $h^{-1}(O)$ פתוח ב מרחב $\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$

☺

תרגיל: מרחב מנה $\mathrm{S}\times[0,1]/\sim$ של גליל $\mathrm{S}\times[0,1]$ כשמכוצים את כל הנקודות של בסיס $\mathrm{S}\times\{0\}$ לנקודה אחת הומיאומורפי לדיסק סגור דו-מימדי .

פתרון: פונקציה $f(\mathrm{x},\mathrm{t})=\mathrm{tx}\quad \mathrm{f}:\mathrm{S}\times[0,1]\to\mathrm{D}$ רציפה על סגורה.

☺

תרגיל: הוכיחו שכל רטרקציה רציפה היא מנה.

הגדרה: נניח Y תת מרחב טופולוגי של X. פונקציה $f:X\to Y$ נקראת "רטרקציה"
retraction אם היא רציפה **על** כך ש $f(y)=y \quad \forall y\in Y$

(שקול: f רציפה על ומתקיים $f\circ f=f$)

פתרון: שימוש במשפט הצימצום (שימו לב שפונקצית הצמצום $f_Y:\mathrm{Y}\to\mathrm{Y}$ היא פונקצית זהות.
לכן מנה. אז גם $f:X\to Y$.

☺

תרגיל: נניח $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \quad x\geq 0 \vee y=0\}$ (תת מרחב של $\mathbb{R}^2$).

נגדיר פונקציה $f(x,y)=x$ $f:X\to\mathbb{R}$ (צמצום של הטלה).

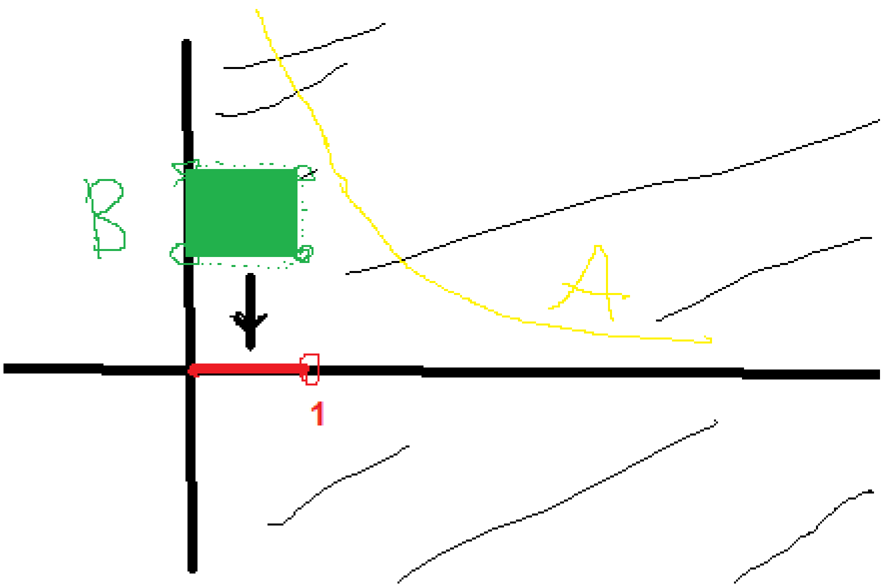
הוכיחו ש f פונקצית מנה אבל f לא סגורה ולא פתוחה.

פתרון: צמצום על ציר x מגדיר הומיאומופיזם (בעצם הפונקציה המקורית היא רטרקציה).

לכן $f:X\to\mathbb{R}$ מנה לפי משפט הצמצום.

f לא פתוחה: $\mathrm{B}:=[0,1)\times(2,3)$ פתוחה ב X. אבל $\mathrm{f(B)}=[0,1)$ לא פתוחה ב $\mathbb{R}$.

f לא סגורה: $\mathrm{A}:=\{(x,\frac{1}{x}):x>0\}$ סגורה ב X. אבל $\mathrm{f(A)}=(0,\infty)$ לא סגורה ב $\mathbb{R}$.



משפטים למבחן:

עיקרון $Heine$ במ"מ *
קריטריון סגירות במ"מ
שיכון למרחב $Banach$
קריטריון לרציפות *
כל מרחב נורמי הומיאומורפי לכל כדור פתוח שלו
האלומות – תנאי מספיק לקשירות
$B_2 \subset Sep$.

אם $X \in T_2$ וגם $\dim(X) = 0$ אז - $X \in T_{3\frac{1}{2}}$.

טופולוגיה חלשה
פתיחות הטלות
נניח $X \in Comp$, $Y \subseteq X$ תת קבוצה סגורה. אז גם $Y \in Comp$.
תמונה רציפה שומרת על $Comp$.
הפרדה של תת רבוצות קומפקטיות

נניח $X \in Comp$, $Y \in T_2$, $f: X \to Y$ רציפה. אזי f פונקציה סגורה.

על השיכון והומיאומורפיזם
כל מרחב מטרי (X, d) קומפקטי הוא מ"מ שלם.

Heine-Borel

קומפקטיות במרחב מטרי *
משפט טיכונוף
קבוצת קנטור C הומיאומורפי עם מרחב מכפלה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$
מספר $Lebesgue$
$LComp \cap T_2 \subset T_{3.5}$
$Metriz \subset T_4$.

למה של Urysohn: $T_4 = T_4^{func}$

האוניברסליות של קוביות Tychonoff
מטריזציה *
טופולוגיה חזקה
תנאי מספיק למנה "צמצום"

הערה: בהוכחות ארוכות (למשל שמסונות ב *) יתכן שתקבלו רק שלבים מסוימים.