חורף תשע"ד

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 9: עקרון המקסימום. נוסחת ניוטון לייבניץ

1. עקרון המקסימום:

תהי $f(z)$ אנליטית בתחום D. אזי באף נקודה של D המודול $|f(z)|$ אינו מקבל את הערך המקסימלי שלו, פרט למקרה ש $f(z)$ קבועה.

מסקנה: אם $f(z)$ אנליטית (ולא קבועה) ב D ורציפה ב $\overline{D}$, אזי הערך המקסימלי של $|f(z)|$ מתקבל על השפה.

(א) מצא את הערך המקסימלי של $|f(z)|$ כאשר $f(z) = z^4/(z+3)^2$ ו $\Gamma = \{z : |z| = 2\}$.

$f(z)$ אינה קבועה לכן $\max|f(z)|$ מתקבל על השפה $z = 2e^{i\theta}$. נרשום

$$|f(z)| = \frac{|z^4|}{|z+3|^3} = \frac{2^4}{|2e^{\imath\theta}+3|^3}.$$

על מנת לקבל את $\max|f(z)|$ נחשב

$\min_\theta|2e^{\imath\theta}+3| = \min_\theta[(2\cos\theta+3)^2+4\sin^2\theta] = 1$, עבור $\theta = \pi$ ולכן $\max|f(z)| = 16$.

(הערה: היינו יכולים להעריך את $|f(z)|$ על השפה:

$|f(z)| \le 2^4/||2e^{i\theta}|-3|^3 = 16$ ולכן $\max|f(z)| \le 16$).

2. נוסחת ניוטון לייבניץ:

אם $f(z)$ אנליטית בתחום פשוט קשר D אזי $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt$ גם אנליטית ב D, ומתקיים $F'(z) = f(z)$

$$\int_{z_0}^{z} f(t)dt = F(z) - F(z_0).$$

$F(z)$ נקראת פונקציה קדומה ל $f(z)$.

(א) חשבו $\int_{-2i}^{2i} dz/z$ כאשר $\ln z = \ln|z| + i\varphi,\ 0 < \varphi < 2\pi$ לאורך חצי המעגל השמאלי $|z| = 2$.

נבחר תחום סגור כלשהוא שעוקף את הקרן $\Re(z) \geq 0$ וכולל את חצי המעגל השמאלי $|z| = 2$. אזי $f(z)$ אנליטית בתחום כזה ולכן

$$\int_{-2i}^{2i} dz/z = \ln z|_{-2i}^{2i} = (\ln|z| + i\varphi)|_{-2i}^{2i} = i\varphi|_{3\pi/2}^{\pi/2} = -i\pi.$$

(הערה: היינו יכולים לסגור את חצי המעגל למעגל $\Gamma = \{|z| = 2\}$ ול- התשמש בנוסחת קושי עבור $f(z) = \varphi(z)/z$ כאשר $\varphi = 1$, על מנת לקבל $\int_{-2i}^{2i} dz/z = -\frac{1}{2}\int_\Gamma dz/z = -\pi i$).