

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 9: עקרון המקסימום. נוסחת ניוטון לייבניץ

1. עקרון המקסימום:

תהי $f(z)$ אנליטית בתחום D . אזי באף נקודה של D המודול $|f(z)|$ אינו מקבל את הערך המקסימלי שלו, פרט למקרה ש $f(z)$ קבועה. מסקנה: אם $f(z)$ אנליטית (ולא קבועה) ב D ורציפה ב \bar{D} , אזי הערך המקסימלי של $|f(z)|$ מתקבל על השפה.

(א) מצא את הערך המקסימלי של $|f(z)|$ כאשר $f(z) = z^4/(z+3)^2$ ו $\Gamma = \{z : |z| = 2\}$

$f(z)$ אינה קבועה לכן $\max |f(z)|$ מתקבל על השפה $z = 2e^{i\theta}$. נרשום

$$|f(z)| = \frac{|z^4|}{|z+3|^3} = \frac{2^4}{|2e^{i\theta} + 3|^3}$$

על מנת לקבל את $\max |f(z)|$ נחשב

$$\min_{\theta} |2e^{i\theta} + 3| = \min_{\theta} [(2 \cos \theta + 3)^2 + 4 \sin^2 \theta] = 1$$

$$\max |f(z)| = 16$$

(הערה: היינו יכולים להעריך את $|f(z)|$ על השפה:

$$(\max |f(z)| \leq 16 \text{ ולכן } |f(z)| \leq 2^4 / ||2e^{i\theta}| - 3|^3 = 16)$$

2. נוסחת ניוטון לייבניץ:

אם $f(z)$ אנליטית בתחום פשוט קשר D אזי $F(z) = \int_{z_0}^z f(t)dt$ גם אנליטית ב D , $F'(z) = f(z)$ ומתקיים

$$\int_{z_0}^z f(t)dt = F(z) - F(z_0).$$

$F(z)$ נקראת פונקציה קדומה ל $f(z)$.

(א) חשבו $\int_{-2i}^{2i} dz/z$ כאשר $\ln z = \ln |z| + i\varphi$, $0 < \varphi < 2\pi$ לאורך חצי המעגל השמאלי $|z| = 2$.

נבחר תחום סגור כלשהוא שעוקף את הקרן $\Re(z) \geq 0$ וכולל את חצי המעגל השמאלי $|z| = 2$. אזי $f(z)$ אנליטית בתחום כזה ולכן

$$\int_{-2i}^{2i} dz/z = \ln z \Big|_{-2i}^{2i} = (\ln |z| + i\varphi) \Big|_{-2i}^{2i} = i\varphi \Big|_{3\pi/2}^{\pi/2} = -i\pi.$$

(הערה: היינו יכולים לסגור את חצי המעגל למעגל $\Gamma = \{z : |z| = 2\}$ ולהתשמש בנוסחת קושי עבור $f(z) = \varphi(z)/z$ כאשר $\varphi = 1$, על מנת לקבל $\int_{-2i}^{2i} dz/z = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} dz/z = -\pi i$.)