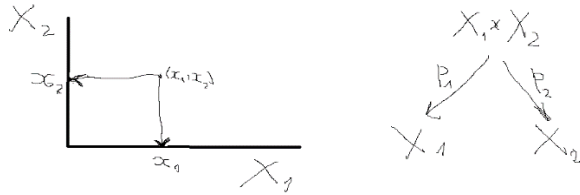


מכפלה טופולוגית (מס' סופי של הגורמים)

מ"ט. איך מגדירים "טופולוגיה טבעית" על  $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$

$$(X_1 \times X_2, \tau_{\Pi} = ?) \quad X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} = \prod_{i \in \{1,2\}} X_i$$



יותר כללי: על  $\tau_{\Pi} = ?$   $X = X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i\} = \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i$

רעיון: מגדירים טופולוגית מכפלה כטופולוגיה הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$p_k : \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i \rightarrow X_k \quad p_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$$

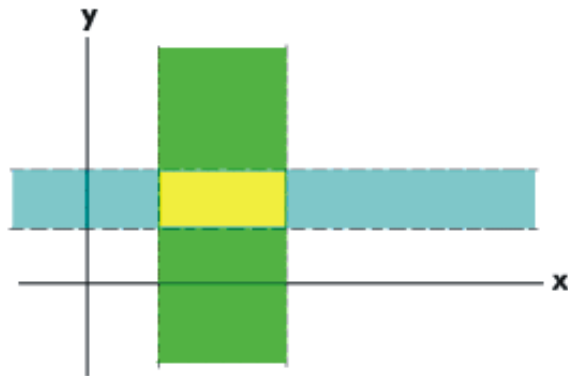


Fig. 2

$$\{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid x_1 \in O_1\} = p_1^{-1}(O_1) = O_1 \times X_2$$

$$p_2^{-1}(O_2) = X_1 \times O_2$$

$$(O_1 \times X_2) \cap (X_1 \times O_2) = \underbrace{O_1 \times O_2}_{\text{"מלבן פתוח"}}$$

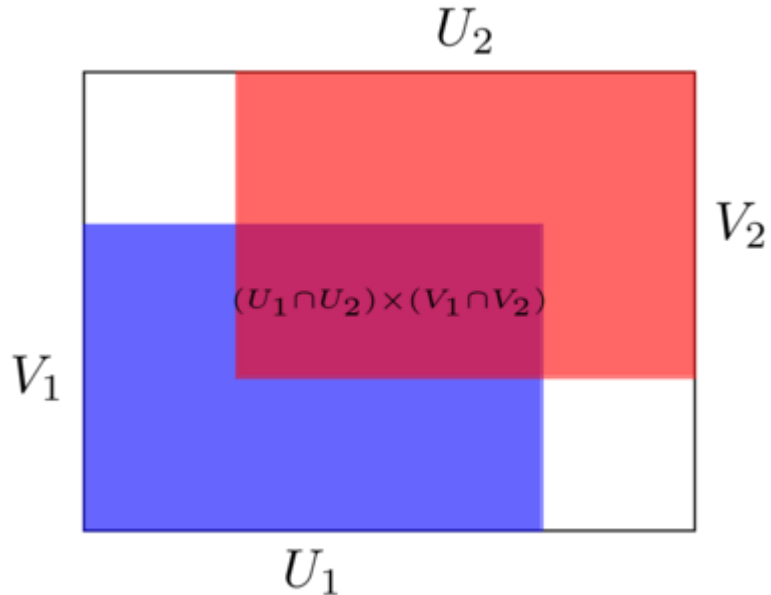
$O_1 \times X_2, X_1 \times O_2$  חייבים להיות מתוך טופולוגיה  $\tau_{\Pi}$  על  $X_1 \times X_2$  על מנת להבטיח את הרציפות.

אז גם חיתוך (סופי) –  $O_1 \times O_2 \in \tau_\pi$

**הגדרה:**  $\gamma := \{O_1 \times \dots \times O_n \mid O_i \in \tau_i\}$  "תיבות בסיסיות"

("מלבנים פתוחים"  $\gamma := \{O_1 \times O_2 \mid O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$  במקרה של  $n=2$ )

מקיים את התנאים:  $\gamma^{\cap} = \gamma, X \in \gamma$



$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

לכן  $\gamma$  בסיס לטופולוגיה מסוימת  $\gamma^\cup$ . נגדיר

$$\tau_\Pi = \gamma^\cup$$

ז"א "קבוצה פתוחה" במכפלה טופולוגית = איחוד של תיבות בסיסיות.

שקול:  $O \in \tau_\Pi \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \in O \Rightarrow \exists O_i \in \mathcal{N}(x_i) \quad O_1 \times \dots \times O_n \subseteq O$


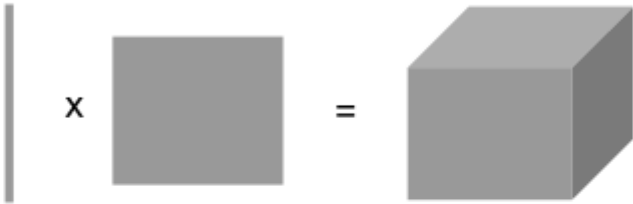
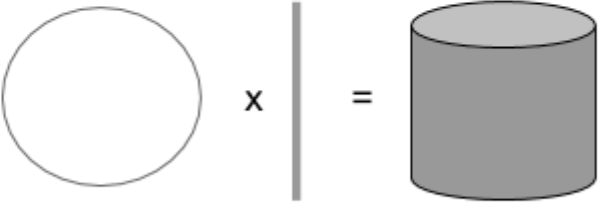

**משפט:**  $X = (\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i, \tau_\Pi)$  מ"ט ו  $\tau_\Pi$  הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$p_i : (\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i, \tau_\Pi) \rightarrow (X_i, \tau_i) \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

בסיס סטנדרטי  $\gamma := \{O_1 \times \dots \times O_n \mid O_i \in \tau_i\}$  "תיבות בסיסיות".  $\tau_\Pi = \gamma^\cup$ .

פרא-בסיס סטנדרטי  $\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) = X_1 \times \dots \times O_i \times \dots \times X_n \mid O_i \in \tau_i\}$  תיבות אלמנטריות". אז

$$\alpha^{\cap F} = \gamma \quad \tau_{\Pi} = (\alpha^{\cap F})^{\cup}$$

$I^1 \times I^1 = I^2$	
$I^1 \times I^2 = I^3$	
$S^1 \times I^1 = \text{Cylinder}$	
$S^1 \times S^1 = \text{Torus}$	

טורוס  $n$ -ממדי  $S_1^n = S_1 \times \dots \times S_1 \simeq T^n$

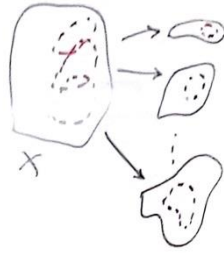
הוא בעל מימד  $n$  קומפקטי (לכן לא הומואומורפי ל  $\mathbb{R}^n$ ) אבל לכל נקודה יש סביבה

שהומואומורפי ל  $\mathbb{R}^n$  (ז"א  $T^n$  לוקלית הומואומורפי ל  $\mathbb{R}^n$ ).

מ"ל עבור  $n=1$  (מדוע?)

**הגדרה: טופולוגיה חלשה (Weak Topology).**

נניח  $X$  קבוצה.  $(X_i, \tau_i) \in TOP$ ,  $i \in I$  מ"ט ונתונה משפחה של פונקציות  $f_i: X \rightarrow X_i$



קיימת טופולוגיה  $\tau_w$  על  $X$  כך ש –

א.  $(X, \tau_w) \xrightarrow{f_i} (X_i, \tau_i)$  רציפות.

ב. בהינתן ש –  $\sigma$  טופולוגיה מסוימת על  $X$  כך ש  $(X, \sigma) \xrightarrow{f_i} (X_i, \tau_i)$  רציפות מתקיים –  $\sigma \supseteq \tau_w$

(ז"א  $\tau_w$  היא הכי חלשה כך שמתקיים א').

$\tau_w$  נקראת "טופולוגיה חלשה". הגדרה פורמלית:

$$\tau_w = (\alpha^{\cap F})^U$$

כאשר  $\alpha := \{f_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \tau_i, i \in I\}$

לפי הבנייה  $\alpha$  פרא-בסיס ל –  $\tau_w$  ו –  $\alpha^{\cap F} := \gamma$  בסיס ל –  $\tau_w$ .

דוגמאות של "טופולוגיה חלשה": מכפלה, תת-מרחב, טופולוגיה נקודתית, טופולוגיה שמוגדרת ע"י משפחת פסאודו-מטריקות, טופולוגיה חלשה במרחבים נורמיים ...

**משפט:** (טופולוגיה חלשה)

נניח  $(Y, \sigma)$  מ"ט ונתונה פונקציה  $g: Y \rightarrow X$

כמו קודם,  $\tau_w$  מסמן טופולוגיה חלשה מעל  $X$  לגבי –  $X \xrightarrow{f_i} (X_i, \tau_i)_{i \in I}$ .

אזי  $Y \xrightarrow{g} (X, \tau_w)$  רציפות  $\Leftrightarrow Y \xrightarrow{f_i \circ g} (X_i, \tau_i)_{i \in I}$  רציפה.

**הוכחה:**

$(\Rightarrow)$ : ברור, כי הרכבה שומרת על רציפות.

$(\Leftarrow)$ :

צ"ל  $Y \xrightarrow{g} (X, \tau_w)$  רציפה.

ש"ל  $\forall O \in \tau_w: g^{-1}(O) \in \sigma$

מ"ל (על פרא-בסיס  $\alpha$ ). ז"א כאשר –

$$\exists i \in I: f_i^{-1}(O_i) = O \in \alpha$$

$$(f_i \circ g)^{-1}(O_i) = g^{-1}(f_i^{-1}(O_i)) = g^{-1}(O)$$

פתוחה בגלל רציפות של  $f_i \circ g$ .

■

**תוצאה:**  $\tau_w$  הטופולוגיה הכי חלשה כך ש...

**הסבר:** זה נובע מהמשפט. אם ניקח  $(X, \tau_w) \xrightarrow{g=id} Y = X$  מהרציפות נקבל  $\sigma \supseteq \tau_w$ .

### מקרים פרטיים של טופולוגיה חלשה:

• תת מרחב טופולוגי:

$$(Y, ?) \xleftarrow[\text{שיכון}]{i} (X, \tau) \quad (Y \text{ תת קבוצה של } X)$$

$$\tau_Y = \tau_w$$

שווה לטופולוגית תת מרחב (שכבר הגדרנו!).

$$\forall O \in \tau \subseteq X: i^{-1}(O) = O \cap Y \quad \text{שימו לב:}$$

• **מכפלה טופולוגית של n גורמים**  $(X_i, \tau_i) \quad i \in \{1, \dots, n\}$

$X = (\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i, \tau_\Pi)$  מ"ט ו  $\tau_\Pi$  הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$p_i: (\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i, \tau_\Pi) \rightarrow (X_i, \tau_i) \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

מתקיים  $\tau_w = \tau_\Pi$  טופולוגית מכפלה כפי שהגדרנו!  $\tau_\Pi = (\alpha^{\cap F})^\cup$

כאשר  $\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) = X_1 \times \dots \times O_i \times \dots \times X_n \mid O_i \in \tau_i\}$  פרא-בסיס "תיבות אלמנטריות".

• הגדרה: מכפלה טופולוגית (אין הגבלה) של  $(X_i, \tau_i) \quad i \in I$

$$X = \left\{ I \xrightarrow{x} \bigcup_{i \in I} X_i, x(i) \in X_i \right\} = \prod_{i \in I} X_i \xrightarrow{p_i} (X_i, \tau_i)$$

מכפלה קרטזית (כקבוצה). איבר טיפוסי "וקטור מוכלל"  $x = (x_i)_{i \in I}$  (פונקציות)

$$\text{היטלים: } p_{i_0}(x) = x(i_0) = x_{i_0}$$

מגדירים  $\tau_w = \tau_{\prod} = (\alpha^{\cap F})^{\cup}$  (טופולוגיה חלשה) (Tychonoff).

$$\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \tau_i\}$$

$$\gamma := \alpha^{\cap F} = \{ \text{תיבות בסיסיות} \} = \{ \bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(O_j) \mid \text{סופי } J \subseteq I, O_j \in \tau_j \}$$

בסיס סטנדרטי.

הערות:

$$\text{א. } p_i^{-1}(O_i) = O_i \times \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j$$

$$\text{ב. } p_i^{-1}(O_i) \cap p_k^{-1}(O_k) = O_i \times O_k \times \prod_{j \in I \setminus \{i,k\}} X_j$$

$$\text{ג. } p_k \left( \bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(O_i) \right) = \begin{cases} O_k & \text{if } k \in J \\ X_k & \text{if } k \notin J \end{cases}$$

$$\text{ד. } O \in \tau_{\prod} \Leftrightarrow x = (x_i)_{i \in I} \in O \Rightarrow \exists \text{ finite } J \subseteq I \exists O_j \in \tau_j \quad x \in \bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(O_j) \subseteq O$$

$$\text{שימו לב: תנאי } x \in \bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(O_j) \text{ שקול ל } \forall j \in J \quad x_j \in O_j$$

• טופולוגיה המוגדרת דרך משפחת פסאודו-מטריקות:

א. תזכורת: אם  $\rho$  פסאודו מטריקה מעל קבוצה  $X$  אז

$$\text{top}(\rho) = \{\rho \text{ פתוחות במובן } \rho\} = \{B_\rho(x, r) \mid x \in X, r > 0\}^U = \gamma^U$$

ב. נניח שנתונה משפחה  $\{\rho_i\}_{i \in I}$  של פסאודו-מטריקות על אותה קבוצה  $X$ .

מגדירים  $\tau_w(\{\rho_i\}_{i \in I})$  כטופולוגיה חלשה של אוסף הפונקציות הזהות:

$$\left\{ X \xrightarrow{id} (X, \text{top}(\rho_i)) \right\} \quad (\forall i: f_i = id)$$

$$\tau_w = (\alpha^{NF})^U \quad \text{לכן}$$

$$\alpha := \{B_{\rho_i}(x, r) \mid x \in X, r > 0, i \in I\}$$

"כדורים" פרא-בסיס ל- $\tau_w$ .

• טופולוגיה נקודתית על  $X = C[0,1]$  (ניתן להכללות):

עבור  $t \in [0,1]$  נגדיר פסאודו-מטריקה  $\rho_t(f_1, f_2) = |f_1(t) - f_2(t)|$ . נקבל

$$\{\rho_t\}_{t \in [0,1]}$$

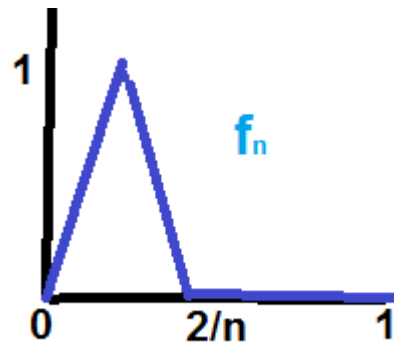
↓

$$\tau_w(\{\rho_t\}_{t \in [0,1]}) =: \tau_p$$

טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה נקודתית (*pointwise topology*).

הערה:  $(C[a, b], \tau_p) \not\subseteq \text{top}(d_{\max})$  לא מטריזבילית (אבל חשובה באנליזה).

$\tau_p \neq \text{top}(d_{\max})$ . למשל סדרת הפונקציות  $f_n \in C[0,1]$  הבאה (עם  $f_n(\frac{1}{n}) = 1$ )



מתכנסת בטופולוגיה נקודתית  $\tau_p$  לפונקצית האפס אבל לא בטופולוגיה  $\text{top}(d_{\max})$ .

- טופולוגיה  $p$ -אדית:  $n \in \mathbb{N}$   $\{ \mathbb{Z} \xrightarrow[k \mapsto k+p^n \mathbb{Z}]{f_n} (\mathbb{Z}_{p^n}, \text{discr}) \}$   $top(d_p) = \tau_w$   
 בעצם פונקציית האלכסון  $f = \Delta_{n \in \mathbb{N}} f_n : (\mathbb{Z}, d_p) \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n}$  מגדיר שיכון טופולוגי.  
 $\mathbb{Z}_{p^n} = \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$  מסמן חבורה ציקלית סופית דיסקרטית עם  $p^n$  איברים).

הגדרה:  $f : X \rightarrow Y$  נקרה שיכון טופולוגי אם פונקציה מושרת  $f : X \rightarrow f(X)$  הומיאומורפיזם.

טענה: נניח  $f_i : Y_i \rightarrow X_i$  פונקציות רציפות  $\forall i \in I$ .

הוכיחו "שפונקציית המכפלה"  $f := \prod_{i \in I} f_i$  הבאה היא רציפה

$$f : \prod_{i \in I} Y_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i \quad f((y_i)_{i \in I}) = (f_i(y_i))_{i \in I}$$

הוכחה: הרעיון הוא להשתמש במשפט "טופולוגיה חלשה".

נגדיר  $Y := \prod_{i \in I} Y_i, X = \prod_{i \in I} X_i$ . נסמן ההטלות ב  $p_i^Y, p_i^X$ . אז יש לנו פונקציה  $f : Y \rightarrow X$  כך ש  $f \circ p_i^Y = p_i^X \circ f$ . נתון ש  $f_i$  רציפות. לכן גם  $f_i \circ p_i^Y$  ששווה ל  $p_i^X \circ f$ . לפי המשפט הנ"ל אפשר להסיק ש  $f_i$  רציפה.



תוצאה: אם כל גורם  $f_i : Y_i \rightarrow X_i$  הומיאומורפיזם אז גם  $f : Y \rightarrow X$ .

$$Y_i \simeq X_i \Rightarrow \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} Y_i \simeq \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i$$

דוגמה:  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z} \simeq (-1, 1) \times (0, 7) \times (5, \infty) \times \mathbb{N}^2$

תרגיל:  $S_2 \setminus \{z\} \simeq (0, 1) \times (2, 4)$

הסבר:  $\forall z \in S_2 \quad S_2 \setminus \{z\} \simeq \mathbb{R}^2$  היטל סטראוגרפי.

מצד שני,  $\mathbb{R}^2 \simeq (0, 1) \times (2, 4)$  בגלל הטענה הקודמת ו-  $\mathbb{R} \simeq (a, b)$ .

תרגיל:  $X \times Y \simeq Y \times X$  (נסו להוכיח וגם להכליל).



משפט: נניח  $f_i : Y \rightarrow X_i$  פונקציות רציפות.

הוכיחו "שפונקצית האלכסון"  $f := \Delta_{i \in I} f_i$  הבאה רציפה

$$f : Y \rightarrow X = \left( \prod_{i \in I} X_i, \tau_{\Pi} \right) \quad f(y) = (f_i(y))_{i \in I}$$

רציפה ומתקיים  $\forall k \in I \quad f_k = p_k \circ f$

$$\forall y \in Y \quad (p_k \circ f)(y) = p_k(f(y)) = p_k(f_i(y))_{i \in I} = f_k(y) \quad \text{הוכחה:}$$

נתון ש  $f_k$  רציפות (והוכחנו  $f_k = p_k \circ f$ ). לכן לפי המשפט "טופולוגיה חלשה" גם  $f$ .

☺

דוגמה:  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow [-1,1], f_1(t) = \cos t \quad f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [-1,1], f_2(t) = \sin t$

$$f = f_1 \Delta f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [-1,1] \times [-1,1], f(t) = (\cos t, \sin t) \quad f(\mathbb{R}) = S_1$$

משפט: (פתיחות הטלות)

כל הטלה  $p_i : \left( \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i, \tau_{\Pi} \right) \rightarrow (X_i, \tau_i)$  היא פונקציה פתוחה.

הוכחה: צ"ל  $\forall O \in \tau_{\Pi} \quad p_k(O) \in \tau_k$

אם  $O \in \gamma$  תיבה בסיסית אז

$$\exists \text{ finite } J \subseteq I \quad O = \bigcap_{i \in J} p_j^{-1}(O_j)$$

$$p_k(O) = p_k\left(\bigcap_{i \in J} p_j^{-1}(O_j)\right) = \begin{cases} O_k & \text{if } k \in J \\ X_k & \text{if } k \notin J \end{cases} \quad \text{נשתמש בשוויון}$$

התמונה היא פתוחה. זה מוכיח מקרה של  $O \in \gamma$ .

במקרה כללי קחו בחשבון ש  $\gamma$  בסיס ל  $\tau_{\Pi}$  ותשתמשו ב  $t_3$  (כל פונקציה שומרת איחודים).

הערה: הטלות בד"כ לא פונקציות סגורות. למשל  $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  לא סגורה כי

$\mathbb{R}^2$  סגורה ב  $\mathbb{R}^2$  אבל  $p_1(A) = (0, \infty)$  לא סגורה ב  $\mathbb{R}$ .

אזהרה: מכפלה קרטזית של קבוצות פתוחות לא תמיד פתוחה

$$\left(\frac{1}{2}, 3\right)^{\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, 3\right) \times \left(\frac{1}{2}, 3\right) \times \dots$$

$(a, b)^{\mathbb{N}}$  לא פתוחה ב  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

הסבר:  $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$

כאן  $I = \mathbb{N}$   $(X_n, \tau_n) = \mathbb{R}$

אם נניח בשלילה ש  $(a, b)^{\mathbb{N}}$  פתוח, אז  $(a, b)^{\mathbb{N}} \in \tau_{\pi} = \gamma^{\cup}$  לכן

$(a, b)^{\mathbb{N}} \leftarrow$  מכיל תיבה בסיסית לא ריקה.

לכן הוא מכיל  $\dots \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times O_m \times O_2 \times O_1 \times \dots \times (a, b) \times (a, b)$

אבל זה גורר  $\mathbb{R} \supseteq (a, b)$ , סתירה!

טענה שימושית: במכפלה סופית אם  $\gamma_i$  בסיס ל  $\tau_i$  אז  $\gamma_1 \times \dots \times \gamma_n$  בסיס ל  $\tau_{\prod}$ .

עבור מכפלה אינסופית:  $\{ \bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(O_j) \mid \text{סופי } J \subseteq I, O_j \in \gamma_j \}$

שאלה חשובה: מתי תכונה נשמרות ע"י מכפלה טופולוגית (סופית, אינסופית)?

• (תמיד ללא הגבלת מספר הגורמים)

$T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$ , קשירות, קשירות מסילתית, קומפקטיות (משפט Tychonoff) ...

• (מכפלות סופיות ובנות מניה)

$\dots, Sep, B_1, B_2, Metr, \dots$

• (מכפלות סופיות)

$LComp, discr$  קומפקטיות מקומית

הגדרה: מ"ט  $X$  הוא קומפקטי מקומית אם לכל נקודה יש סביבה קומפקטית.

הערה: "קומפקטיות מקומית" לא נשמרת ע"י מכפלה אינסופית (סופית – כן!).

תרגיל:  $\mathbb{R}^n \in LComp$  אבל  $LComp \ni \mathbb{R}^n$ .

הסבר: כל סביבה  $V \in N(x)$  של כל נקודה  $x = (x_1, \dots) \in \mathbb{R}^n$  מכילה תיבה בסיסית  $U := U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$  ב  $\mathbb{R}^n$ .  
 לכן הטלה  $\mathbb{R} = p_{m+1}(U) = p_{m+1}(V)$  עם תמונה רציפה  $\mathbb{R}$  (שהיא לא קומפקטית) ...

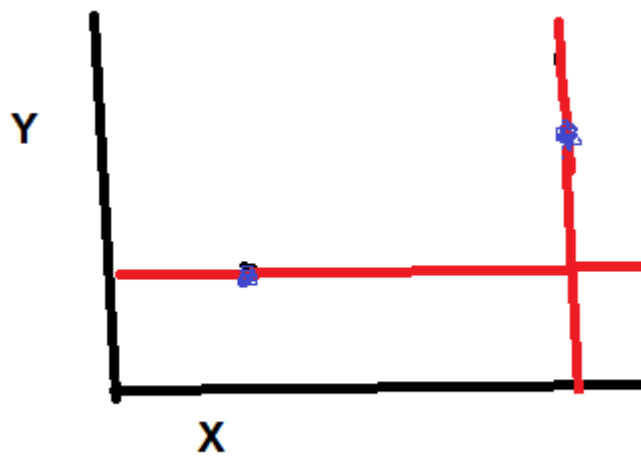
הערה: דיסקרטיות לא נשמרת ע"י מכפלה אינסופית בת מנייה.

למשל  $C \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \notin discr$  הומיאומורפי לקבוצת קנטור.

תרגיל: א.  $X \times \{y\} \simeq X$   $\{x\} \times Y \simeq Y$ .

ב. הוכיחו  $X \times Y \in Conn \Leftrightarrow X, Y \in Conn$ .

רמז: כדאי להיעזר ב (א) ובמשפט האלומות (השירשור).



הערה: מכפלה סופית שומרת על מטריזביליות (נכון גם למכפלה בת מנייה).

$$(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2) \in Metr$$

$$\rightarrow \left( X_1, \underbrace{top(\rho_1)}_{\tau_1} \right), \left( X_2, \underbrace{top(\rho_2)}_{\tau_2} \right) \in TOP$$

טענה: יש התאמה עם הגדרת טופולוגית  $\tau_\pi$  - "מטריקת מכפלה".

(א) "מטריקה בסגנון אוקלידס" -

$$d(x, y) := \sqrt{\rho_1(x_1, y_1)^2 + \rho_2(x_2, y_2)^2}$$

$$d_1(x, y) := \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2) \quad (\text{ב})$$

$$d_{max}(x, y) := \max\{\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2)\} \quad (\text{ג})$$

תרגיל:

$$X := X_1 \times X_2 - \text{מ} \quad d \sim d_1 \sim d_{max} \quad (\text{א})$$

$$\underbrace{top(d) = top(d_1) = top(d_{max})}_{(\text{א}) \Rightarrow} = \tau_{\pi} \quad (\text{ב})$$

טופולוגיית מכפלה

מטריזציה במקרה של מכפלה בן מנייה:

$$X = \prod_{i \in \mathbb{N}} (X_i, \rho_i) = X_1 \times X_2 \times \dots$$

$$d(x, y) := \sup \left\{ \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)} \mid i \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{אחת מהאפשרויות.}$$

תרגיל: לכל פונקציה רציפה  $f: X \rightarrow Y$  מתקיים ש

$$X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}}_{\text{תת מרחב טופולוגי}} \subset X \times Y$$

רמז: כדאי להשתמש בפונקצית ההטלה.

תרגיל: הוכיחו  $X \in T_2 \Leftrightarrow \Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\} \in T_2$  סגור ב  $X \times X$ .

תרגיל: \* הוכיחו שאם  $f: X \rightarrow Y$  ו  $Y \in T_2$  רציפה אז  $Gr(f)$  סגור ב  $X \times Y$ .

שאלה: האם יש קשר בין שני התרגילים הקודמים ?

תרגיל: \* הוכיחו:  $cl\left(\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \prod_{i \in \mathbb{N}} cl(A_i)$  לכל  $A_i \subseteq (X_i, \tau_i)$

תרגיל: \* "מישור סורגנפראי"  $(\mathbb{R}, \tau_s)^2 \in Sep$  אבל יש תת מרחב לא ספרבילי.

**הגדרה:** נניח  $(G, \cdot)$  חבורה ו-  $(G, \tau)$  מ"ט.

אומרים ש-  $(G, \cdot, \tau) \in TGr$  חבורה טופולוגית (*Topological Group*) אם מתקיים:

א. "כפל"  $G \times G \rightarrow G \quad (a, b) \mapsto a \cdot b$  פונקציה רציפה.

שקול:  $\forall a_1, a_2 \in G \forall U \in N(ab) \exists V_1 \in N(a_1), V_2 \in N(a_2) \quad V_1 V_2 \subseteq U$

ב. "ההיפוך":  $G \rightarrow G \quad a \mapsto a^{-1}$  פונקציה רציפה.

שקול:  $\forall a \in G \forall U \in N(a) \quad U^{-1} \in N(a^{-1})$

### דוגמאות:

- כל מרחב נורמי  $(E, \|\cdot\|)$  מגדיר חבורה טופולוגית  $(E, +, \tau_{\|\cdot\|})$
- $(\mathbb{Z}, +, \tau_p)$
- כל חבורה בטופולוגיה דיסקרטית

**הערה:** בהגדרת של  $TGr$  - (א)  $\neq$  (ב).

**דוגמה:**  $(\mathbb{R}, +, \tau_s)$  בטופולוגית סורגנפראי.

תזכורת:  $\mathbb{R} \ni 0 \in \tau_s \stackrel{def}{=} \forall x \in O \exists \epsilon > 0: [x, x + \epsilon) \subseteq O$

למשל  $- [0, 1) \in \tau_s$  פתוחה אבל לא  $[-1, 0)$  (שהוא מקור של  $[0, 1)$ ).

הסבר נוסף:  $\lim \frac{1}{n} = 0$  but  $\lim(-\frac{1}{n}) \neq 0$ .

### לסקרנים:

- (על חבורות טופולוגיות)

באתר <http://u.math.biu.ac.il/~megereli/seminar.html> ראו קבצים :

<http://u.math.biu.ac.il/~megereli/IntroTopGr.pdf>

<http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TGrNotes070217.pdf>

<http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TGrEx.pdf>

- (על מכפלה טופולוגית) [https://en.wikipedia.org/wiki/Product\\_topology](https://en.wikipedia.org/wiki/Product_topology)