תרגיל 13

1. הוכיחו ש־$\mathbb{R}$ כאשר מכווצים את $[0,1]$ לנקודה עדיין הומיאומורפי ל־$\mathbb{R}$.

2. נסתכל על הגליל $X := S \times [0,1]$ ונגדיר יחס $\sim$ על ידי

$$(x,\alpha) \sim (y,\beta) \iff \alpha = \beta = 0 \vee \Big(\alpha = \beta \wedge x = y\Big)$$

כלומר, מדביקים את נקודות הבסיס $S \times \{0\}$ יחד. הראו ש־$X/\sim$ הומיאומורפי לדיסק סגור דו ממדי.

3. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ו־$Y \subseteq X$. נגדיר רטרקציה (משיכה) כפונקציה רציפה $f : X \to Y$ כך שלכל $y \in Y$ מתקיים $f(y) = y$. הראו שכל רטרקציה רציפה היא מנה.

4. נגדיר יחס שקילות על הספירה

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

לפי

$$(x,y,z) \sim (x',y',z') \iff (x,y) = (x',y')$$

הראו ש־

$$S^2/\sim \cong D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

5. הראו ש־$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ היא פונקציית מנה.

6. נסתכל על $X = \{0,1\}$ עם טופולוגיית שרפינסקי $\tau = \{X, \emptyset, \{0\}\}$. נגדיר יחס שקילות $\sim$ על $I = [0,1]$ לפי

$$x \sim y \iff \Big(x, y \in [0, \frac{1}{2})\Big) \vee \Big(x, y \in [\frac{1}{2}, 1]\Big)$$

7. הוכיחו או הפריכו: כל פולינום $p:\mathbb{R}\to p(\mathbb{R})$ הוא פונקציית מנה.
<u>בונוס:</u> האם זה נכון גם מעל $\mathbb{C}$

8. נסתכל על $X:=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ועל יחס השקילות $\sim$ שמוגדר על ידי

$$(x,y)\sim(x',y')\iff \exists\alpha>0:(x,y)=\alpha(x',y')$$

הראו ש־$X/\sim\cong S$ כאשר $S\subseteq\mathbb{R}^2$ הוא הספרה.

1 שאלות סיכום

1. הוכיחו או הפריכו: אם (X,d) מרחב מטרי קומפקטי ו־$f:X\to X$ היא פונקציית ליפשיץ עם מקדם 1, אז יש ל־f נקודת שבת.

2. יהי (X,τ) מרחב קומפקטי
   (א) הוכיחו או הפריכו: אם X קשיר מקומית אז הוא גם קשיר
   (ב) הוכיחו או הפריכו: אם X קשיר מסילתית מקומית אז הוא גם קשיר מסילתית

3. יהי $(P,<)$ מרחב סדור לינארית. הוכיחו ש־P קומפקטי עם טופולוגיית הסדר אם ורק אם לכל תת קבוצה לא ריקה יש $\sup$ ו־$\inf$, כלומר חסם עליון קטן ביותר וחסם תחתון גדול ביותר.