(88132) חשבון אינפיניטסימלי 1 | מבחן תשע"ה מועד ב'

הצעת פתרון | לירן מנצורי ויונתן סמידוברסקי

שאלה 1

א. נסח והוכח את מבחן העיבוי להתכנסות טורים חיוביים.

ב. הוכח, או הפרך על ידי דוגמא נגדית, את ההכללה הבאה של מבחן העיבוי:

תהי a_n סידרה חיובית יורדת.

תהי m_n סידרה עולה ממש של מספרים טבעיים, כך שלכל n מתקיים $2^n \leq m_n$.

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty} m_n \cdot a_{m_n}$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

סעיף א

תהי $a_n \searrow 0$ אזי

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס

(2) שאריות הטור מקיימות $|r_k| \leq a_{k+1}$ (כלומר $S_k - a_{k+1} \leq S \leq S_k + a_{k+1}$)

<u>הוכחה</u>

(1) לכל k, מתקיים

$$S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2k-1} - a_{2k})$$

$$S_{2(k+1)} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2k-1} - a_{2k}) + (a_{2k+1} - a_{2k+2})$$

נשים לב שמירידתה של הסדרה, מתקיים שכל הסכומים בסוגריים הם חיוביים, בפרט $a_{2k+1} - a_{2k+2}$ ולכן $S_{2(k+1)} \geq S_{2k}$

כלומר $(S_{2k})_{k=1}^{\infty}$ סדרה עולה

ומצד שני, אפשר להסתכל על S_{2k} גם כך

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ... - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}$$

כעת הסכומים שאנחנו מחסירים חיוביים, וגם $a_{2k} > 0$, סך הכל הסדרה חסומה מלעיל, ולכן מתכנסת $S := lim_{k\to\infty} S_{2k}$.

כעת, $S_{2k-1} = S_{2k} - a_{2k} \to S - 0 = S$

לסיכום $S_{2k}, S_{2k-1} \to S$ ולכן $S_k \to S$, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = S$ קיים.

(2) יהי k נסתכל בטור על הזנב $r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty}(-1)^n a_n$,

עבור k אי- זוגי נקבל מקרה פרטי של מה שהוכחנו כי $a_{k+1} \geq a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} = r_k \geq 0$

עבור k זוגי $r_k = -a_{k+1} + a_{k+2} - ... = -(a_{k+1} - a_{k+2} + ...)$
כעת $0 \leq a_{k+1} - a_{k+2} + ... \leq a_{k+1}$, לכן $-a_{k+1} \leq r_k \leq 0$
סך הכל $|r_k| \leq a_{k+1}$ לכל k, כלומר $S_k - a_{k+1} \leq S \leq S_k + a_{k+1}$ ולכן סיימנו.

סעיף ב

אם ניקח $m_n := 2^{(2^n)}$ ואת הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nlog(n)} = \infty$
אבל ניעזר בטור ההנדסי לקבלת

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{(2^n)}}{2^{2^n} log(2^{2^n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{log(2)} \cdot \frac{1}{2^n} < \infty$$

וקיבלנו אחד מתבדר והשני מתכנס, ולכן לא מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

שאלה 2

א. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידרה המוגדרת בעזרת נוסחת הנסיגה הבאה:

$a_1 = 1$, ולכל מספר טבעי n, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^3}$.

קבע האם הסידרה a_n מתכנסת (במובן הצר) או לא.

ב. מצא את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right).$$

סעיף א

נראה שהסדרה לא מתכנסת, נניח בשלילה שהיא כן, ונסמן

$$lim_{n\to\infty}a_n = L$$

ואז מתקיים

$$L = lim_{n\to\infty}a_n = lim_{n\to\infty}a_{n+1}$$

ונשים לב שקיבלנו

$$lim_{n\to\infty}(a_n + \frac{1}{a_n^3}) = L$$

אם $L \neq 0$ מחשבון גבולות

$$L + \frac{1}{L^3} = L$$

$$\frac{1}{L^3} = 0$$

בסתירה.

ונראה גם שלא יכול להתקיים $L = 0$ משום ש$\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \geq 1$ באינדוקציה:

בסיס: מתקיים $a_1 = 1 \geq 1$

צעד האינדוקציה: נניח $a_n \geq 1$, נראה כי $a_{n+1} \geq 1$

ואכן $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^3} \geq 1 + \frac{1}{a_n^3} \geq 1$

סעיף ב

$$lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{tan(x)}) = lim_{x\to 0}(\frac{tan(x)-x}{x\cdot tan(x)})$$

ולפי לופיטל במקרה $\frac{0}{0}$

$$= lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{cos^2(x)}-1}{tan(x)+\frac{x}{cos^2(x)}} = lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-cos^2(x)}{cos^2(x)}}{\frac{sin(x)}{cos(x)}+\frac{x}{cos^2(x)}} = lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2(x)}{sin(x)\cdot cos(x)+x} = lim_{x\to 0}\frac{sin^2(x)}{0.5sin(2x)+x}$$

שוב לופיטל

$$= lim_{x\to 0}\frac{2sin(x)cos(x)}{cos(2x)+1} = \frac{0}{2} = 0$$

שאלה 3

א. יהי b מספר ממשי. הגדר את המונח "$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$".

ב. תזכורת: פונקציה נקראת מחזורית אם קיים מספר ממשי חיובי c ("מחזור") כך שלכל x מתקיים $f(x+c) = f(x)$.

הוכח, או הפרך על ידי דוגמא נגדית, את הטענה הבאה: אם f הינה פונקציה מחזורית שמוגדרת בקרן $(0,\infty)$ והגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים וממשי, אזי קיים מספר ממשי חיובי a כך שהפונקציה f קבועה בקרן (a,∞).

סעיף א

לכל $\epsilon > 0$ קיים $M > 0$ כך שלכל $x > M$ מתקיים $|f(x) - b| < \epsilon$

סעיף ב

הוכחה תהי f פונקציה מחזורית המוגדרת בקרן $(0,\infty)$ ואכן קיים הגבול $lim_{x\to\infty}f(x) = L$

נניח בשלילה שהיא לא קבועה בקטע (a,∞).

כלומר קיימות לכל $a \in \mathbb{R}$ קיימים $x_1, x_2 > a$ כך ש $f(x_1) \neq f(x_2)$. כעת ניקח שתי סדרות $a_n := x_1 + cn, b_n := x_2 + cn$

ולפי לשון היינה מתקיים

$$f(a_n) \to L$$

אבל ממחזוריות $f(a_n) = x_1 \to x_1$, מיחידות הגבול $L = x_1$

ובדומה עבור b_n, מקבלים $L = x_2$

מקבלים סך הכל $x_1 = x_2$ בסתירה.

שאלה 4

א. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. הגדר את המינוח "הפונקציה f רציפה במידה שווה בתחום A".

ב. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה במידה שווה בקרן $(0,\infty)$, המקיימת $1 < f(x)$ לכל $x \in (0,\infty)$.
הוכח שהפונקציה $\sqrt{f(x)}$ רציפה במידה שווה בקרן $(0,\infty)$.

סעיף א

פונקציה f רציפה במידה שווה בתחום A אם $A \subseteq dom(f)$, ולכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$
כך שמתקיים לכל $x_1, x_2 \in A$ המקיימים $|x_1 - x_2| \leq \delta$ כי $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$
(כתבתי את אחת ההגדרות השקולות שיהיה לנו נוח לעבוד איתה)

סעיף ב

ב) יהי $\epsilon > 0$ ניקח את ה$\delta' > 0$ המתאים מבחינת הרציפות במידה שווה של $f(x)$ ונראה שמתקיים מה שצריך.
נבחר $\delta := \delta'$, יהיו $x_1, x_2 \in (0,\infty)$ המקיימים $|x_1 - x_2| \leq \delta$ כעת נראה כי $|\sqrt{f(x_1)} - \sqrt{f(x_2)}| \leq \epsilon$

$$|\sqrt{f(x_1)} - \sqrt{f(x_2)}| = |\sqrt{f(x_1)} - \sqrt{f(x_2)}| \cdot \frac{|\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)}|}{|\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)}|}$$

$$= \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)}|} \leq \frac{\epsilon}{|\sqrt{1} + \sqrt{1}|} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon$$

שאלה 5

יהי $a > 0$ מספר ממשי. נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{x^2+4x} & x < 0 \\ x^a + \frac{1}{a} & x \geq 0 \end{cases}.$$

קבע לאילו ערכים $a > 0$ הפונקציה f רציפה בקרן $(-4, \infty)$.

נמצא לאלה ערכי $a > 0$ יתקיים כי היא רציפה ב$(-4, \infty)$- כלומר רק בנק' $-4, 0$.
משום שבכל שאר הנקודות הפונקציה רציפה כפונקציה אלמנטרית ובתחום ההגדרה.
צריך למצוא a כך ש

$$lim_{x \to 0^-} f(x) = lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$

נחשב $lim_{x \to 0^-} f(x)$
מלופיטל

$$lim_{x \to 0^-} f(x) = lim_{x \to 0^-} \frac{ae^{ax}}{2x+4} = \frac{a \cdot 1}{4} = \frac{a}{4}$$

כעת

$$lim_{x \to 0^+} f(x) = lim_{x \to 0^+} (x^a + \frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$$

ומתקיים גם

$$f(0) = \frac{1}{a}$$

סך הכל מקבלים את המשוואה

$$\frac{1}{a} = \frac{4}{a}$$

$$a = 4$$

וסיימנו (פורמלית צריך להוכיח שכעת היא רציפה, אבל דאגנו לתנאי הזה).