

תרגיל 6 – אינפי 2

משפט: תהי  $f$  פונקציה המוגדרת בקטע  $[a, b]$ . אזי  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$  אם"ם היא חסומה בקטע ולכל  $\varepsilon > 0$  קיימת חלוקה  $T$  של  $[a, b]$  עבורה מתקיים  $|\overline{S}(T) - \underline{S}(T)| < \varepsilon$ .

.1

- a. הוכח/הפוך: אם פונקציה  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$  פרט למספר סופי של נקודות היא אינטגרבילית בו.  
 b. תהי פונקציה  $f$  כך שיש לה פונקציה קדומה  $F$  בקטע  $[a, b]$ . הוכח/הפוך:  $f$  אינטגרבילית בקטע.

c. תהי  $A \in [0, 1]$  כך ש  $A$  אינסופית מעוצמה  $\aleph_0$ . ותהי  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$ . הוכח

ש  $f$  אינה אינטגרבילית בקטע, או הבא דוגמא נגדית והוכח שהיא כן אינטגרבילית בקטע.

2. תהי  $f$  פונקציה רציפה ואי שלילית בקטע  $[a, b]$  כך ש  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . הוכח ש  $f$  שווה

זהותית לאפס בקטע.

3. הוכח כי קיים גבול לסדרה  $a_n = \sum_{i=1}^{2^n} \sin \frac{i}{2^{2^n}} \cos \frac{i}{2^{2^n}} \cos \frac{i}{2^{2^{n-1}}} \cdots \cos \frac{i}{2^{n+1}}$

4. תהי  $f = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \frac{n-1}{n} \leq x \leq \frac{n}{n+1} \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ . האם  $f$  אינטגרבילית בקטע  $[0, 1]$ ? הוכח.