<u>תרגיל</u>: כל קבוצה <u>קשירה ופתוחה</u> O במרחב <u>נורמי</u> E היא קשירה מסילתית.

<u>הסבר</u>: נבחר $a \in O$ ונסמן $a \in A := [a]_p$ מרכיב קשירות מסילתית של a <u>במרחב</u> O.

אז A פתוחה. כי אם $x \in A$ אז $B_\varepsilon(x) \subseteq O$ עבור ε מספיק קטן. $B_\varepsilon(x)$ קמור לכן קיימת מסילה לינארית ב $B_\varepsilon(x)$ מ x לכל $y \in B_\varepsilon(x)$. אז גם קיימת מסילה (לא בהכרח לינארית) במרחב O מנקודה a ל y (טרנזיטיביות). לכן $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

באופן דומה אפשר להוכיח שגם המשלים $O \setminus A$ פתוח. אבל אז $O \setminus A$ קבוצה ריקה כי אחרת נקבל ש O פריק. לכן $O = A = [a]_p$ ואז O קשיר מסילתית (מרכיב 1).

<u>משפט</u>: $B_2 \subset Sep$.

<u>הוכחה</u>: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X,τ). צריך למצוא תת קבוצה צפופה בת מניה.

בה"כ $\varnothing \notin \gamma$. לכל $G \in \gamma$ נבחר נקודה אחת בלבד $y_G \in G$. נגדיר $Y_\gamma := \{y_G \mid G \in \gamma\}$ אז Y_γ בת מניה (כי γ ב"מ) ו Y_γ צפופה ב X. אכן נוכיח $cl(Y_\gamma) = X$.

לכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש $a \in G_a \subseteq O$. לפי הבנייה קיים $y_G \in G_a$

לכן $y_G \in Y_\gamma \cap O \neq \varnothing$.

זה מוכיח שכל נקודה $a \in X$ שייכת לסגור של Y_γ. ז"א $cl(Y_\gamma) = X$.

☺

<u>תוצאה 1</u>: $\boxed{B_2 \cap Metriz = Sep \cap Metriz}$..

<u>תוצאה 2</u>: במרחבים מטריזביליים – ספרביליות כן תורשתית.

הסבר: כי B_2 תורשתית ...

<u>טענה</u>: $l_\infty \notin Sep$ (קיים מרחב בנך לא ספרבילי).

הסבר: $(l_\infty, d_{sup}) \underset{\text{תת מרחב מטרי}}{\hookleftarrow} \underbrace{(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d_\Delta)}_{\text{סדרות בינאריות}}$ לא ספרבילי

(מרחב דיסקרטי ספרבילי אם"ם הוא בן מניה)

<u>הערה</u> 1: $B_2 \neq Sep$.

נוכיח בהמשך שקו סורגנפראי מקיים: $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep, \quad (\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2$.

<u>הערה</u> 2: ספרביליות לא תורשתית (גם בבמרחבים יחסית טובים).

למשל: * "מישור סורגנפראי" $(\mathbb{R}, \tau_s)^2 \in Sep$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי.

<u>טענה</u>: נניח X קבוצה ו γ אוסף תת קבוצות ב X. התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה מסוימת.
2. א. $X \in \gamma^{\cup}$

   ב. חיתוך של 2 קבוצות מ γ אפשר להציג כאיחוד של קבוצות מ γ.

<u>הערה</u>: ב שקול ל ב*: $\forall A, B \in \gamma\ \forall x \in A \cap B\ \exists C \in \gamma \quad x \in C \subseteq A \cap B$

ב* שקול ל ב**: $\gamma^{\cap_F} \subseteq \gamma^{\cup}$.

<u>הוכחה</u>: נגדיר אוסף $\tau := \gamma^{\cup}$. מ"ל τ טופולוגיה.

$(t_1) \quad \varnothing, X \in \tau$

הסבר: $X \in \tau$. בגלל תנאי א. תנאי $\varnothing \in \tau$ נובע מהתכונה הנ"ל על $\gamma^{\cup}$.

$(t_2) \quad \tau^{\cap_F} = \tau$

הסבר: $\tau^{\cap_F} = (\gamma^{\cup})^{\cap_F} = (\gamma^{\cap_F})^{\cup} \subseteq (\gamma^{\cup})^{\cup} = \gamma^{\cup} = \tau$.

$(t_3) \quad \tau^{\cup} = \tau$

הסבר: $\tau^{\cup} = (\gamma^{\cup})^{\cup} = \gamma^{\cup} = \tau$.

☺

בסיס מקומי

הגדרה: $\beta \subseteq N(a)$ נקרא **בסיס מקומי** בנקודה a, אם לכל $U \in N(a)$ קיים $V \in \beta$ כך ש $V \subseteq U$.

הגדרה: אומרים ש- (X, τ) **בעל תכונת מנייה ראשונה**, ונסמן: $(X, \tau) \in B_1$ אם לכל נקודה $a \in X$ קיים בסיס מקומי בן מנייה.

דוגמה: לכל (X, d) – דוגמאות לבסיס מקומי בנקודה a –

$\beta_1 := \{B_r(a)\}_{r>0}$

$\beta_2 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ בן מנייה ! $\quad\quad \beta_3 := \{B[a, \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\}$

תוצאה: $Metriz \subset B_1$

דוגמה: $(X, \tau_{discr}) \in \mathrm{B}_1$.

הסבר: לכל $a \in (X, \tau)$ היא נקודה מבודדת אם"ם נקודון $\alpha := \{a\}$ הוא בסיס מקומי.

הערה:

- מספיק לבדוק רציפות פונקציה דרך בסיס.
- מספיק לבדוק רציפות בנקודה עבור סביבות מבסיס מקומי.
- מספיק לבדוק התכנסות סדרות עבור סביבות מבסיס מקומי

תרגיל: B_1 תכומה תורשתית.

טענה: $B_2 \subset B_1$

הסבר: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X,τ). לכל $a \in X$ נגדיר $\gamma_a := \{A \in \gamma \mid a \in A\}$.

אז γ_a בסיס מקומי בנקודה a.

דוגמה: $B_2 \neq B_1$. $\begin{cases}(\mathbb{R},\tau_{discr}) \in B_1 \\ (\mathbb{R},\tau_{discr}) \notin B_2\end{cases}$

הערה: $Discrete \subset Metriz \subset B_1$

$Metriz \cap Sep \subset B_2 \subset B_1$

הגדרה: $\mathbf{dim}(X) = \mathbf{0} \overset{def}{=}$ קיים בסיס γ לטופולוגיה כך שכל $A \in \gamma$ קבוצה סגוחה.

הגדרה: אומרים ש $\dim X \le 1$ אם קיים בסיס γ כך ש $\dim \partial(A) = 0 \quad \forall A \in \gamma$.

אומרים ש $\dim X \le n+1$ אם קיים בסיס γ כך ש $\dim \partial(A) \le n \quad \forall A \in \gamma$.

דוגמאות: $\dim \mathbb{R}^n = \dim S_n = n$ ....

א. $\dim(X,\tau_{discr}) = 0$

ב. $\dim(\mathbb{Q}) = 0$.

$\gamma := \{(a,b) \cap \mathbb{Q} | a,b \in \mathbb{Q}^c\}$ בסיס שמורכב מקבוצות סגוחות.

$(a,b) \cap \mathbb{Q}$ קבוצה סגוחה ב - $\mathbb{Q}$ לכל $a,b \in \mathbb{Q}^c$.

ג. $\dim(\mathbb{Z}, d_p) = 0$.

ד. $\dim(\mathbb{R},\tau_s) = 0$ Sorgenfrey line

תזכורת: $O \in \tau_s \overset{def}{=} x \in O \Rightarrow \exists\, \epsilon = \epsilon_x > 0 : [x, x+\epsilon_x) \subset O$

תכונות קו סורגנפריי:

- $(\mathbb{R},\tau_s) \in T_2$
- א. $\tau \neq \tau_s$ ב. $\tau \subset \tau_s$.

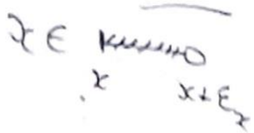
הסבר: א. $[0,1) \notin \tau,\quad [0,1) \in \tau_s$.

ב. מ"ל שבסיס של טופולוגיה טבעית τ מוכל ב τ_s.

$(a,b) = \cup\{[x, x+\varepsilon_x) \mid x \in (a,b)\} \in \tau_s$

- $\dim(\mathbb{R}, \tau_s) = 0$.

<u>הסבר:</u> $\gamma := \{[a,b) : a < b\} \subset \tau_s$ בסיס שמורכב מקבוצות סגוחות.

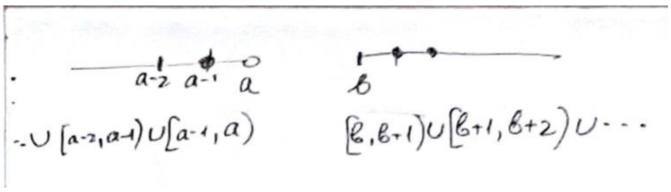


$O = \bigcup_{x \in O}[x, x+\epsilon_x)$

- טענת עזר: כל $[a,b)$ **סגוחה** –

א) $[a,b) \in \tau_s$ ברור (כלומר פתוחה לפי ההגדרה).

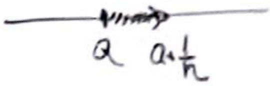
ב) $[a,\mathrm{b})$ גם סגורה כי $\mathbb{R}/[a,b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ פתוחה.



- $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep$

הסבר: רציונליים $\mathbb{Q}$ קבוצה צפופה גם בטופולוגית τ_s כי $[a,\mathrm{b}) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$

- $(\mathbb{R}, \tau_s) \in B_1$



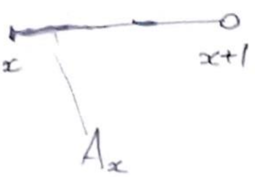
<u>הסבר:</u>

$$\alpha := \left\{U_n := \left[a, a+\frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \subset N_{\tau_s}(a)$$

בסיס מקומי בן מנייה בנקודה $a \in \mathbb{R}$.

- <u>**טענה**</u>: $(\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2$

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה שקיים בסיס $\gamma \subset \tau_s$ כך ש γ בן מנייה.



$[x, x+1) \in \tau_s$ פתוחה, לכן הוא שווה לאיחוד איברים מבסיס γ.

אז קיים $A_x \in \gamma$ כך ש - $x \in A_x \subset [x, x+1)$.

נבחר A_x כזה ונגדיר העתקה $x \mapsto A_x \quad \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \gamma$

φ חח"ע $(x \neq y \Rightarrow A_x \neq A_y)$.

$$2^{\aleph_0} = \aleph = |\mathbb{R}| = |\varphi(\mathbb{R})| \leq |\gamma|$$

מכאן $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} \leq |\gamma|$, לכן γ לא בת מנייה!

- $(\mathbb{R}, \tau_s) \in T_{3\frac{1}{2}}$.

הסבר: נובע מהטענה הבאה:

משפט: אם $X \in T_2$ וגם $\dim(X) = 0$ אז - $X \in T_{3\frac{1}{2}}$.

הוכחה: נניח $a \in X, a \notin B, cl(B) = B$.

על מנת לבדוק $X \in T_{3.5}$ צ"ל קיימת הפרדה פונקציונלית של a ו B.

$a \in B^c \in \tau$. לכן לפי הגדרת מימד אפס קיימת קבוצה סגוחה O כך ש
$a \in O \subseteq B^c$

$O \subset X$ קב' סגוחה אזי – $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in O \\ 1, & x \notin O \end{cases}$

רציפה! (4 מקרים .... ראינו הוכחה דומה).

ברור שהפומקציה מפרידה a ו B.

☺

- $(\mathbb{R}, \tau_S) \notin Metriz$.

הסבר: $Metr \cap Sep \subset B_2$. אבל $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep$ $(\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2$.

תרגיל: הוכיחו שאם $\dim X = 0, X \in T_2$ אז X לא קשיר לחלוטין.

קשר בין עקרון *Heine* ותכונת B_1

הגדרה: אומרים שמ"ט הוא בעל **תכונת *FU*** $(Frechet - Urysohn)$ אם:

$$\forall A \subseteq X: \ \ scl(A) = cl(A)$$

הערה: $Metriz \subset B_1 \subset FU$

הערה: למדנו דוגמה של מ"ט שהוא לא *FU*.

טענה: $B_1 \subseteq FU$.

הוכחה מקוצרת: שימו לב שאם $X \in B_1$ אז לכל נקודה יש בסיס מקומי בן מנייה

$\alpha = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ מונוטוני (ז"א $U_{n+1} \subseteq U_n$). ואז ההמשך דומה למקרה של מ"מ

משפט (עיקרון $Heine$ מתוקן): נניח $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ פו' בין מ"ט. נניח ש - $(X,\tau) \in FU$ (למשל: $(X,\tau) \in B_1$) אין הגבלה על Y. אז התנאים הבאים שקולים:

א) f רציפה.

ב) f שומרת על התכנסות.

הוכחה: $(1) \Rightarrow (2)$: תמיד (ממשפט $\frac{1}{2}$ היינה).

$(2) \Rightarrow (1)$: (מקוצרת) .....

$$f\big(cl(A)\big) \underbrace{=}_{X\in FU} f\big(scl(A)\big) \underbrace{\subsetneq}_{\text{הראנו}} scl\big(f(A)\big) \underbrace{\subsetneq}_{\text{תמיד מתקיים}} cl\big(f(A)\big)$$

☺

תוצאה: עיקרון $Heine$ תמיד נכון למשל עבור קו $Sorgenfrey$ –$(\mathbb{R},\tau_s) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ כי $(\mathbb{R},\tau_s) \in B_1 \subset FU$.

הערה: בטופולוגיה, באנליזה ... יש צורך אמיתי ב"סדרות מוכללות":

$(M,\preccurlyeq)$ קבוצה <u>סדורה חלקית</u> **מכוונת** (לכל $\forall a,b\in M\ \exists c\in M\ a\le c, b\le c$).

סדרה מוכללת או רשת (*generalized sequences or net*) היא פונקציה $(M,\preccurlyeq) \xrightarrow{f} X$ (סדרה רגילה: $(\mathbb{N},\le) \xrightarrow{f} X$).

<u>דוגמה חשובה</u>: כל בסיס מקומי β (לנקודה a) דוגמה לקבוצה סדורה מכוונת.

אם לכל $V\in\beta$ נבחר באיבר $x_V \in V$ אז נקבל $\lim\{x_V : V\in\beta\} = a$.

דרך רשתות אפשר לתת תיאור של $cl(A)$.

$z \in cl(A) \Leftrightarrow z$ גבול של סדרה מוכללת

ואז יש הכללת עיקרון $Heine$ ...

<u>שימו לב:</u> למשל אינטגרלים זה סוג של גבול דרך רשתות מסוימות.

ספר מומלץ: ד. ליבוביץ, טופולוגיה קבוצתית, האוניברסיטה הפתוחה.

Pre-base (subbase)

הגדרה: נניח (X,τ) מ"ט. $\alpha\subseteq\tau$ נקרא פרא-בסיס (אומרים גם תת-בסיס) אם

$\alpha^{\cap F}$ הוא בסיס ל τ שקול: $(\alpha^{\cap F})^{\cup} = \tau$

דוגמאות:

1) כל בסיס הוא פרא-בסיס.

2) א) $X = \mathbb{R}$ $\alpha \coloneqq \{(-\infty, b), (a, \infty)\}$. $a, b \in \mathbb{R}$ (או $a, b \in \mathbb{Q}$).

α פרא– בסיס אבל לא בסיס! $\alpha^{\cap F} \supset \alpha^{\cap_2} \supset \underbrace{\gamma = \{(a,b)\}}_{\mathbb{R}-\text{בסיס ל}}$

הגדרה: לכל קבוצה סדורה לינארית $(X, \leq)$ אפשר להגדיר "interval topology" $\tau_{\leq}$

עם פרא-בסיס $\alpha \coloneqq \{(-\infty, b), (a, \infty) \mid a, b \in X\}$ $\tau_{\leq} = (\alpha^{\cap F})^{\cup}$

ב) $X = \mathbb{R}^2$. $\alpha = \{(a,b) \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times (c,d)\}$

כאשר $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (או $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$) הוא פרא-בסיס.

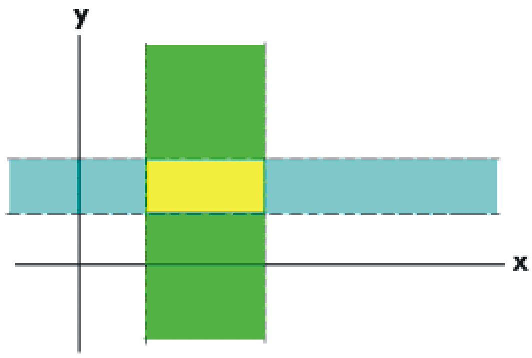


Fig. 2

טענה: נניח $X, Y \in TOP$ ונתונה פונקציה $f: X \to Y$.

$\alpha \subset \tau_Y$ פרא-בסיס. אז התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה.
2. $\forall U \in \alpha: f^{-1}(U) \in \tau_X$.

הסבר:

(1) ⇐ (2): בגלל קריטריון 2 של הרציפות.

(2) ⇐ (1): צ"ל $\forall O \in \tau_Y: f^{-1}(O) \in \tau_X$.

מצד שני, α תת בסיס ל - τ_Y, לכן – $O \in \tau_Y = (\alpha^{\cap F})^{\cup}$

$f^{-1}(O) \in \tau_X$ כי ה"מקור" שומר על $\cap_F$ וגם על $\cup$.

■

תוצאה: התנאים הבאים שקולים :

1. $f: X \to \mathbb{R}$ רציפה.
2. $f^{-1}(-\infty, b), f^{-1}(a, \infty)$ פתוחות לכל $a, b \in \mathbb{Q}$ (או $a, b \in \mathbb{R}$).

הסבר: דוגמה 2א + הטענה.

■

טענה: נניח $\alpha \subset P(X)$ כך ש – α כיסוי ל – X. אז α הוא פרא-בסיס לטופולוגיה –
$\tau := (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

הסבר:

(t_1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \alpha^{\cup}$ (כי נתון ש – α כיסוי).

$$(t_2) \quad \tau^{\cap_F} = ((\alpha^{\cap_F})^{\cup})^{\cap_F} = ((\alpha^{\cup})^{\cap_F})^{\cap_F} = (\alpha^{\cup})^{\cap_F} = \tau$$

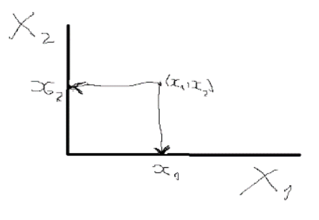
$$(t_3) \quad \tau^{\cup} = ((\alpha^{\cap_F})^{\cup})^{\cup} = (\alpha^{\cap_F})^{\cup} = \tau .$$

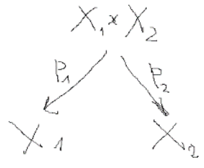
■

מכפלה טופולוגית (מס' סופי של הגורמים)

(X_1, τ_1), (X_2, τ_2) מ"ט. איך מגדירים "טופולוגיה טבעית" על

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} = \prod_{i \in \{1,2\}} X_i \qquad (X_1 \times X_2, \tau_{\Pi} = ?)$$





כללי יותר: $\tau_{\Pi} = ?$ על $X = X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i\} = \prod_{i \in \{1, \cdots, n\}} X_i$

רעיון: מגדירים טופולוגית מכפלה כטופולוגיה הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של **הטלות**

$$p_k : \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i \to X_k \qquad p_k(x_1,\cdots,x_n) = x_k$$

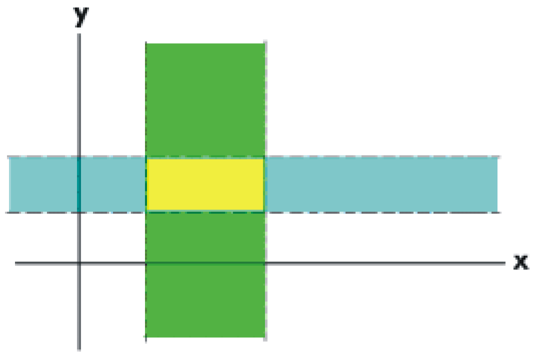


Fig. 2

$$\{(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2 | x_1 \in O_1\} = p_1^{-1}(O_1) = O_1 \times X_2$$

$$p_2^{-1}(O_2) = X_1 \times O_2$$

$$(O_1 \times X_2) \cap (X_1 \times O_2) = \underbrace{O_1 \times O_2}_{\text{"מלבן פתוח"}}$$

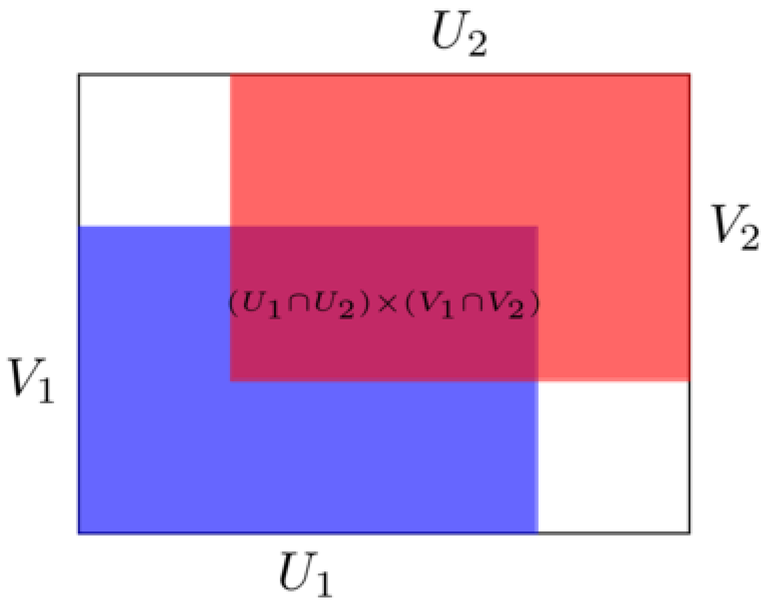
$O_1 \times X_2$,$X_1 \times O_2$ חייבים להיות מתוך טופולוגיה τ_π על $X_1 \times X_2$ על מנת להבטיח את הרציפות.

אז גם חיתוך (סופי) – $O_1 \times O_2 \in \tau_\pi$

הגדרה: $\gamma := \{O_1 \times \cdots \times O_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות בסיסיות"

("מלבנים פתוחים" $\gamma := \{O_1 \times O_2 \mid O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$ במקרה של $n=2$)

מקיים את התנאים: $\gamma^{\cap_F} = \gamma, X \in \gamma$



$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

לכן γ בסיס לטופולוגיה מסוימת $\gamma^{\cup}$. נגדיר

$$\tau_{\Pi}=\gamma^{\cup}$$

ז"א "קבוצה פתוחה" במכפלה טופולוגית = איחוד של תיבות בסיסיות.

שקול: $O\in\tau_{\Pi}\Leftrightarrow(x_1,\cdots,x_n)\in O\Rightarrow\exists O_i\in\mathrm{N}(x_i)\quad O_1\times\cdots\times O_n\subseteq O$

משפט: $X=(\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}}X_i,\tau_{\Pi})$ מ"ט ו τ_{Π} הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$\mathrm{p}_i:(\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}}\mathrm{X}_i,\tau_{\Pi})\to(\mathrm{X}_i,\tau_i)\quad(x_1,\cdots,x_n)\mapsto x_i$$

בסיס סטנדרוי $\gamma:=\{O_1\times\cdots\times O_n\mid O_i\in\tau_i\}$ "תיבות בסיסיות". $\tau_{\Pi}=\gamma^{\cup}$.

פרא-בסיס סטנדרטי $\alpha:=\{\mathrm{p}^{-1}{}_i(O_i)=\mathrm{X}_1\times\cdots\times O_i\times\cdots\times X_n\mid O_i\in\tau_i\}$ "תיבות אלמנטריות". אז

$$\alpha^{\cap_F}=\gamma\quad\tau_{\Pi}=(\alpha^{\cap_F})^{\cup}$$

<u>שאלה חשובה</u>: מתי ככונה נשמרות ע"י מכפלה טופולוגית (סופית, אינסופית) ?

למשל: ... קשירות, קומפקטיות , $T_0,T_1,T_2,T_3,T_{3.5}$ ... (תמיד)

$\cdots,Sep,B_1,B_2,Metriz,\cdots$ (מכפלות סופיות ובנות מניה).

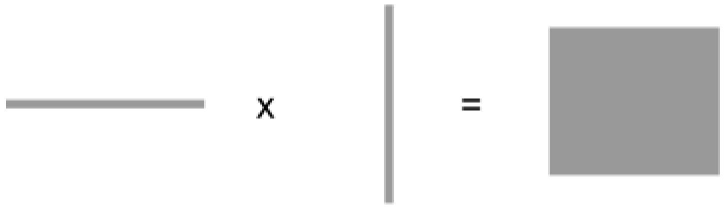
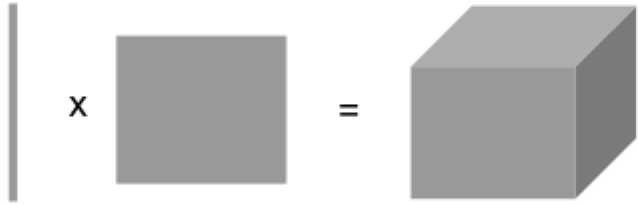
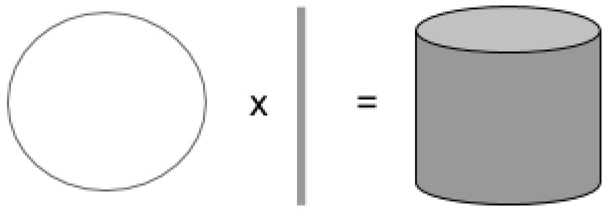
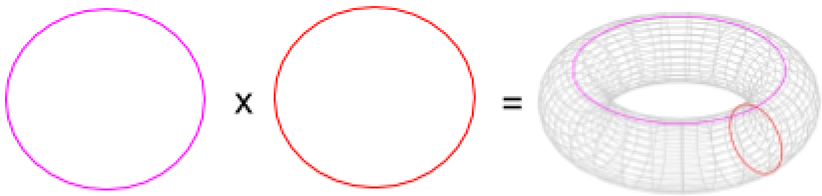
<u>טענה שימושית</u>: אם γ_i בסיס ל τ_i אז $\gamma_1\times\cdots\times\gamma_n$ בסיס ל τ_{Π}.

<u>משפט</u>: כל הטלה $\mathrm{p}_i:(\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}}\mathrm{X}_i,\tau_{\Pi})\to(\mathrm{X}_i,\tau_i)$ היא פונקציה פתוחה.

הסבר: צ"ל $\mathrm{p}_k(\mathrm{O})\in\tau_k\quad\forall\mathrm{O}\in\tau_{\Pi}$.

$\mathrm{p}_k(O_1\times\cdots\times O_n)=O_k$. זה מוכיח מקרה ש $O=O_1\times\cdots\times O_n\in\gamma$.

במקרה כללי קחו בחשבון ש γ בסיס ל $\tau_{\prod}$ ותשתמשו ב t_3 (כל פונקציה שומרת איחודים).

$I^1 \times I^1 = I^2$	
$I^1 \times I^2 = I^3$	
$S^1 \times I^1$ = Cylinder	
$S^1 \times S^1$ = Torus	

<u>**משפט**</u>: נניח $f_i : Y \to X_i$ פונקציות רציפות. הוכיחו שפונקציה הבאה

$$f : Y \to X = \Big(\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i, \tau_{\prod}\Big) \qquad f(y) = (f_i(y))_{i\in I}$$

רציפה ומתקיים $f_i = p_i \circ f$.

<u>הוכחה</u>: $\forall y \in Y \quad (p_k \circ f)(y) = p_k(f(y)) = p_k(f_i(y)_{i\in I}) = f_k(y)$

מספיק לבדוק רציפות f דרך מקור של פרא-בסיס (ניקח מקרה של $\alpha =$ {ת"א}).

מ"ל $f^{-1}(p_i^{-1}(O_i)) \in \tau_Y \quad \forall p_i^{-1}(O_i) \in \alpha$.

אכן בגלל $f_i = p_i \circ f$ ורציפות של f_i נקבל

$$f^{-1}(p_i^{-1}(O_i)) == (p_i \circ f)^{-1}(O_i) = f_i^{-1}(O_i) \in \tau_Y$$

☺

טענה: נניח $f_i : Y_i \to X_i$ פונקציות רציפות.

- הוכיחו שפונקציה $f_i \prod_{i\in\{1,\cdots n\}} =: f$ הבאה רציפה

$$f : \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} Y_i \to \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i \quad f((y_i)_{i\in I}) = (f_i(y_i))_{i\in I}$$

- אם כל גורם $f_i : Y_i \to X_i$ הומיאומורפיזם אז גם $f : Y \to X$.
- הסיקו: $\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i \simeq \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} Y_i \Leftarrow Y_i \simeq X_i$.

תרגיל: $S_2 \setminus \{z\} \simeq (0,1)\times(2,4)$

הסבר: $\forall\, z \in S_2 : S_2/\{z\} \simeq \mathbb{R}^2$ היטל סטראוגרפי.

מצד שני, $\mathbb{R}^2 \simeq (0,1)\times(2,4)$ בגלל טענה קודמת ו- $\mathbb{R} \simeq (a,b)$.

תרגיל: $X\times Y \simeq Y\times X$.

תרגיל: הוכיחו $X \in T_2 \Leftrightarrow \{(x,x) \mid x\in X\}$ סגור ב $X\times X$.

תרגיל: לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} Y$ מתקיים ש - $X \simeq$
$\underbrace{Gr(f) := \{(x, f(x)) \mid x\in X\}}_{\text{תת מרחב טופלוגי}} \subset X\times Y$.

רמז: כדאי להשתמש בפונקצית ההטלה.

תרגיל: א. $\{x\}\times Y \simeq Y \quad X\times\{y\} \simeq X$.

ב. הוכיחו $X, Y \in Conn \Leftrightarrow X\times Y \in Conn$.

רמז: כדאי להיעזר ב (א).

תרגיל: * "מישור סורגנפראי" $(\mathbb{R}, \tau_s)^2 \in Sep$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי.

הערה: מכפלה סופית שומרת על מטריזביליות (נכון גם למכפלה בת מניה).

$$(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2)\in Metr$$

$$\to\left(X_1,\underbrace{top(\rho_1)}_{\tau_1}\right),\left(X_2,\underbrace{top(\rho_2)}_{\tau_2}\right)\in TOP$$

טענה: יש התאמה עם הגדרת טופולוגית τ_π - "מטריקת מכפלה".

א) "מטריקת אוקלידס" –

$$d(x,y)\coloneqq\sqrt{\rho_1(x_1,y_1)^2+\rho_2(x_2,y_2)^2}$$

$$x=(x_1,x_2)$$

$$y=(y_1,y_2)$$

ב) $d_1(x,y)\coloneqq\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2)$

ג) $d_{max}(x,y)\coloneqq\max\{\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2)\}$

תרגיל:

א) $d\sim d_1\sim d_{max}$ מ - $X\coloneqq X_1\times X_2$.

ב) $\underbrace{top(d)=top(d_1)=top(d_{max})}_{(\text{א})\Rightarrow}=\underbrace{\tau_\pi}_{\text{טופולוגית מכפלה}}$