פתרון בוחן ב' בקורס תורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

הוראות יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור.
אנא התחילו את הפתרון לכל שאלה בעמוד נפרד, וציינו את מספר השאלה בתחילת העמוד.
משך הבוחן: 90 דקות.
סך הנקודות עולה על 100, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו 100.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד (שאין בו ממש צורך).

בהצלחה!

שאלה 1. (30 נק') ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שקיים מונומורפיזם $f: \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10} \to S_{14}$.

ב. הפריכו שקיים אפימורפיזם $f: S_5 \to A_5 \times \mathbb{Z}_2$.

פתרון.

א. נציג שני פתרונות, האחד באמצעות משפט קיילי והשני באופן ישיר.
<u>באמצעות משפט קיילי:</u> לפי משפט קיילי, ישנם שיכונים $\mathbb{Z}_4 \hookrightarrow S_4$ ו-$\mathbb{Z}_{10} \hookrightarrow S_{10}$, ולכן $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10} \hookrightarrow S_4 \times S_{10}$. לכן מספיק להראות שקיים מונומורפיזם $S_4 \times S_{10} \hookrightarrow S_{14}$.
את השיכון הזה אפשר להגדיר מפורשות: נגדיר $f: S_4 \times S_{10} \to S_{14}$ לפי

$$f(\sigma,\tau)(i) = \begin{cases} \sigma(i), & 1 \le i \le 4 \\ \tau(i-4)+4, & 5 \le i \le 14 \end{cases}.$$

אפשר לוודא שזה אכן מגדיר מונומורפיזם, כנדרש.
<u>באופן ישיר:</u> כדי להגדיר מונומורפיזם $f: \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10} \hookrightarrow S_{14}$, מספיק לבחור את $a = f(1,0)$ ואת $b = f(0,1)$. אלו צריכות להיות תמורות מסדרים 4 ו-10 בהתאמה, וכן צריכות להתחלף. לכן נבחר למשל

$$f(n,m) = a^n b^m = (1,2,3,4)^n (5,6,\cdots,14)^m.$$

f מוגדרת היטב: אם $n \equiv n' \pmod 4$ ו-$m \equiv m' \pmod{10}$, אז $4 \mid (n-n')$ ו-$10 \mid (m-m')$. לכן $a^n = a^{n'}$ (כי הסדר של $a = (1,2,3,4)$ הוא 4), ובדומה $b^m = b^{m'}$. לכן $f(m,n) = f(m',n')$.
f הומומורפיזם: המחזורים $a = (1,2,3,4)$ ו-$b = (5,6,\cdots,14)$ מתחלפים, ולכן

$$\begin{aligned} f((n,m)+(n',m')) &= f(n+n', m+m') = a^{n+n'} b^{m+m'} \\ &= a^n a^{n'} b^m b^m = a^n b^m a^{n'} b^m = \\ &= f(n,m) f(n',m') \end{aligned}$$

f חח"ע: נניח $f(n,m)=\mathrm{id}$. כלומר $a^n b^m=\mathrm{id}$. כיוון שהמחזורים זרים, בהכרח נקבל $a^n=\mathrm{id}$ וגם $b^m=\mathrm{id}$ (אפשר לראות זאת גם לפי $a^n=b^{-m}$). זה מראה ש-$4\mid n$ ו-$10\mid m$, כי הסדר של מחזור מאורך k הוא k, ולכן $(n,m)=(0,0)$.
בסך הכל, f מגדיר את המונומורפיזם הנדרש.
<u>אתגר:</u> מצאו שיכון של $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{10}$ לתוך A_{13}.

ב. ראשית, נשים לב ש-$|A_5\times\mathbb{Z}_2|=60\cdot 2=120=|S_5|$. לכן אם קיים אפימורפיזם כנ"ל, הוא חייב להיות איזומורפיזם. נראה שתי דרכים לפסול זאת.
<u>פתרון א':</u> ראינו בתרגול שבחבורה S_5, סדרי האיברים האפשריים הם $1,2,3,4,5,6$ (לפי מבנה המחזורים). לעומת זאת, ב-$A_5\times\mathbb{Z}_2$ יש איבר מסדר 10 – שהוא $((1\ 2\ 3\ 4\ 5),1)$ כי במכפלה קרטזית מתקיים $o((a,b))=[o(a),o(b)]$. אילו החבורות היו איזומורפיות, רשימת סדרי האיברים בשתיהן הייתה זהה, והיינו מקבלים סתירה. לכן לא קיים אפימורפיזם כזה.
<u>פתרון ב':</u> בתרגילי הבית ראינו כי $Z(S_5)=\{\mathrm{id}\}$. לעומת זאת, ב-$A_5\times\mathbb{Z}_2$ יש איבר מרכזי שאינו היחידה, שהוא $(\mathrm{id},1)$ (למעשה $Z(A_5\times\mathbb{Z}_2)=\langle(\mathrm{id},1)\rangle$).

שאלה 2. (36 נק') תהי G חבורה, ותהי $H\le G$ תת־חבורה. נזכיר כי המנרמל של H ב-G הוא
$$N_G(H)=\left\{g\in G \,\middle|\, gHg^{-1}=H\right\}$$
ושהוא תת־החבורה הגדולה ביותר של G שבה H נורמלית.

א. הוכיחו או הפריכו: אם H אבלית ולא טריוויאלית, אז $N_G(H)$ אבלית.

ב. חשבו את $N_{D_5}(N_{D_5}(\langle\sigma^2\rangle))$, כאשר $D_5=\left\langle\sigma,\tau \,\middle|\, \sigma^5=\tau^2=\mathrm{id},\sigma\tau=\tau\sigma^{-1}\right\rangle$.

ג. מצאו איבר $x\in D_5$ שעבורו $N_{D_5}(\langle x\rangle)\ntriangleleft D_5$.

פתרון.

א. <u>הפרכה.</u> לפי החישוב בסעיף ב', נראה כי $N_{D_5}\left(\left\langle\sigma^2\right\rangle\right)=D_5$, שאינה חבורה אבלית, למרות ש-$\left\langle\sigma^2\right\rangle$ היא חבורה אבלית.

ב. אפשר לפתור את הסעיף הזה על ידי חישוב ישיר עם כל האיברים של D_5.
נציג פתרון אחר. ראשית, מתקיים $\langle\sigma\rangle=\left\langle\sigma^2\right\rangle$. הרי $5=o(\sigma)$, ולכן $o(\sigma^2)=\frac{o(\sigma)}{(o(\sigma),2)}=5$, ומכאן שהם ייצרו את אותה תת־החבורה הציקלית. מצד שני, ראינו בתרגול כי $[D_5:\langle\sigma\rangle]=[D_5:\left\langle\sigma^2\right\rangle]=2$, ולכן $\left\langle\sigma^2\right\rangle\triangleleft D_5$. מהגדרת המנרמל, בהכרח $N_{D_5}(\left\langle\sigma^2\right\rangle)=D_5$ (כי זו תת־החבורה המקסימלית של D_5 שבה $\left\langle\sigma^2\right\rangle$ נורמלית). כמובן, $N_{D_5}(D_5)=D_5$, ולכן $N_{D_5}(N_{D_5}(\left\langle\sigma^2\right\rangle))=D_5$.

ג. מהסעיף הקודם, אי אפשר לבחור לסעיף הזה חזקות של σ. נבחר את $x=\tau$. כיוון ש-$\langle\tau\rangle=\{\mathrm{id},\tau\}$, נקבל
$$g\in N_{D_5}(\langle\tau\rangle)\iff g\langle\tau\rangle g^{-1}=\langle\tau\rangle\iff\left\{\mathrm{id},g\tau g^{-1}\right\}=\{\mathrm{id},\tau\}\iff g\tau g^{-1}=\tau,$$
כלומר המנרמל של τ שווה למְרַכֵּז של τ. נבחן שני סוגים של איברים: $\sigma^i,\tau\sigma^i$. ברור כי σ^i לא מתחלף עם τ לכל $0<i<5$. עבור איבר כללי:
$$\tau^i\sigma^j\tau(\tau^i\sigma^j)^{-1}=\tau^i\sigma^j\tau\sigma^{-j}\tau^{-i}=\tau^i\tau\sigma^{-2j}\tau^{-i}=$$
$$=\tau^i\tau\tau^{-i}\sigma^{(-1)^{i+1}2j}=\tau\sigma^{(-1)^{i+1}2j}\neq\tau$$
ועבור $\tau\sigma^i$:
$$\tau\sigma^i\tau(\tau\sigma^i)^{-1}=\tau\sigma^i\tau\sigma^{-i}\tau=\tau\tau\sigma^{-i}\sigma^{-i}\tau=\sigma^{-2i}\tau=\tau\sigma^{2i}\neq\tau$$
לכן $N_{D_5}(\langle\tau\rangle)=\langle\tau\rangle$, שאיננה תת־חבורה נורמלית של D_5 (כי למשל $\sigma\langle\tau\rangle=\{\sigma,\sigma\tau\}\neq\{\sigma,\tau\sigma\}=\langle\tau\rangle\sigma$).

שאלה 3. (40 נק') תהי G חבורה סופית, ותהיינה $H, K \leq G$ תת־חבורות. נגדיר

$$HK = \{hk \,|\, h \in H, k \in K\}.$$

א. תנו דוגמה לחבורה G ולתת־חבורות $H, K \leq G$ שעבורן HK <u>אינה</u> תת־חבורה של G.
(רמז: כדאי לבחור תת־חבורות שאינן נורמליות ב-G.)

ב. נגדיר פעולה של החבורה $H \times K$ על הקבוצה HK לפי $(h,k) * x = hxk^{-1}$ (אין צורך להוכיח שזו פעולה). חשבו את $\operatorname{orb}(e_G)$ ואת $\operatorname{stab}(e_G)$, והסיקו כי $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

פתרון.

א. אפשר לבחור את $G = D_4$, וצריך לבחור תת־חבורות שאינן נורמליות. נבחר את $H = \langle \tau \rangle, K = \langle \tau\sigma \rangle$. הקבוצה $HK = \{\mathrm{id}, \tau, \tau\sigma, \sigma\}$ אינה תת־חבורה כי היא אינה סגורה לפעולה. למשל $\tau\sigma \cdot \sigma = \tau\sigma^2 \notin HK$. היא גם לא סגורה להופכי כי $\sigma^{-1} \notin HK$.
דוגמה פופולרית אחרת היא $G = S_3$ ו-$H = \langle (12) \rangle, K = \langle (23) \rangle$. אז בקבוצה HK ישנם ארבעה איברים $\{\mathrm{id}, (12), (23), (123)\}$. לפי משפט לגראנז' הסדר של תת־חבורה מחלק את סדר החבורה, אבל 4 לא מחלק את $|S_3| = 6$, שזו סתירה.

ב. לפי ההגדרה,

$$\operatorname{orb}(e_G) = \{(h,k) * e \,|\, (h,k) \in H \times K\} = \left\{hk^{-1} \,\middle|\, h \in H, k \in K\right\} = HK^{-1} = HK$$

כשבמעבר האחרון השתמשנו בכך ש-K תת־חבורה, ולכן $K^{-1} = K$. עבור המייצב,

$$\begin{aligned}\operatorname{stab}(e_G) &= \{(h,k) \in H \times K \,|\, (h,k) * e_G = e_G\} = \\ &= \left\{(h,k) \in H \times K \,\middle|\, hk^{-1} = e_G\right\} = \\ &= \{(h,k) \in H \times K \,|\, h = k\} = \{(a,a) \,|\, a \in H \cap K\}\end{aligned}$$

כעת ניעזר במשפט מסלול-מייצב:

$$|HK| = |\operatorname{orb}(e_G)| = \frac{|H \times K|}{|\operatorname{stab}(e_G)|} = \frac{|H|\,|K|}{|H \cap K|}$$

כנדרש.